Evaluación Censal de Estudiantes 2018

Informe para **docente**

¿Qué logran nuestros estudiantes en Matemática?

2.° grado de **secundaria**

Contenido

Mejores peruan@s Siempre

PERÚ Ministerio de Educación

El Perú Primero

Estimado docente:

Reciba un cordial saludo y mi más sincero reconocimiento por la labor que realiza a diario para promover el desarrollo integral de sus estudiantes.

Somos conscientes de que la educación es la piedra angular de una sociedad, porque a través de ella transformamos a los niños y las niñas en ciudadanos con los conocimientos necesarios para hacer realidad sus proyectos de vida y contribuir a mejorar su entorno.

A fines de 2018, el Ministerio de Educación realizó a nivel nacional la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) y la Evaluación Muestral de Estudiantes (EM) con el fin de obtener información sobre los aprendizajes logrados en ciertos grados y áreas curriculares. Estas evaluaciones son una herramienta muy valiosa que utiliza el sistema educativo para monitorear, a lo largo de los años, cómo se desarrollan los aprendizajes de nuestros estudiantes y en qué medida estamos asegurando su derecho a acceder a una educación de calidad.

Le hacemos llegar los resultados con el fin de que pueda usted utilizar este informe como un documento que oriente su labor educativa y le ayude a analizar qué prácticas pedagógicas pueden ayudar a mejorar las competencias de los escolares.

El futuro de los estudiantes está en nuestras manos. Juntos podemos alcanzar el sueño de ser una nación en la cual todos tengamos las mismas oportunidades.

Atentamente,

Flor Pablo Medina

Ministra de Educación

1. Aspectos generales

¿Qué es la ECE?

La ECE es una evaluación que el Ministerio de Educación implementa en escuelas públicas y privadas con el propósito de conocer qué y cuánto han aprendido los estudiantes peruanos en ciertas áreas y/o competencias del currículo. Los resultados de esta evaluación ofrecen información confiable a directores, docentes y otros actores del sistema educativo sobre los logros de aprendizaje de los estudiantes. A partir de ella, se deben generar espacios de reflexión y orientar las acciones de mejora.

¿Qué se evaluó en la ECE de segundo grado de secundaria?

En 2.° grado de secundaria, se evaluaron las áreas curriculares de Comunicación (Lectura y Escritura), Matemática, Ciencias Sociales (Historia, Geografía y Economía) y, por primera vez, Ciencia y Tecnología. Cabe señalar que la prueba de Escritura solo se aplicó a un grupo de 5 968 estudiantes de todo el país.

¿Cómo la ECE atiende la diversidad?

La participación en las evaluaciones de logros de aprendizaje es un derecho de todos los estudiantes. Una de las maneras en que la ECE atiende la diversidad es mediante la adaptación de las pruebas y los procedimientos de aplicación para los estudiantes con algún tipo de discapacidad. De este modo, se asegura la participación de todos los estudiantes en la evaluación.

¿Para qué deben usarse los resultados de la ECE en su IE?

Debido a que el aprendizaje es un proceso continuo, los resultados de 2.° grado de secundaria no solo reflejan los esfuerzos realizados en un solo año. Estos evidencian principalmente las oportunidades de aprendizaje que los estudiantes han tenido hasta ese momento. Por lo tanto, es importante que las acciones de mejora no solo se centren en el grado evaluado, sino que tomen en cuenta los grados previos.

Además, a partir de los resultados de 2.° grado de secundaria en las áreas curriculares evaluadas, las IE pueden implementar en el VII ciclo las estrategias de apoyo para que todos los estudiantes, sobre todo aquellos que no lograron los aprendizajes esperados, reciban las oportunidades necesarias para consolidar sus aprendizajes y concluir satisfactoriamente su educación secundaria.

2. ¿Qué logran los estudiantes de 2.° grado de secundaria de su IE en Matemática?

Las siguientes tablas muestran los resultados de los estudiantes de 2.° grado de secundaria de su IE en Matemática. Para una mejor comprensión, los resultados deben interpretarse tomando en cuenta la descripción de los niveles de logro que encontrará en las páginas 8, 9, 10 y 11.

Tabla 2.1 *Resultados de su IE en 2.° grado de secundaria en Matemática*

Niveles de logro	Su IE	
	Cantidad	Porcentaje
Satisfactorio		
En proceso		
En inicio		
Previo al inicio		
Total		

Nota: Las escuelas con menos de 10 estudiantes no tienen resultados porcentuales para evitar interpretaciones sesgadas.

Tabla 2.2 *Resultados de su IE en 2.° grado de secundaria en Matemática según sexo (cantidad de estudiantes)*

Niveles de logro	Sexo	
	Hombre	Mujer
Satisfactorio		
En proceso		
En inicio		
Previo al inicio		
Total		

En general, se espera que la mayoría de los estudiantes de una institución educativa logren el nivel Satisfactorio y que un menor número se ubique en los niveles En inicio y Previo al inicio. Además, no deberían existir grandes diferencias entre los resultados de los hombres y de las mujeres.

A nivel nacional, un mayor número de hombres se ubica en el nivel Satisfactorio respecto de las mujeres. En su IE, ¿se aprecia alguna diferencia entre los resultados de hombres y mujeres?, ¿los hombres y las mujeres tienen similares oportunidades para el desarrollo de sus competencias matemáticas?

A continuación, se presentan los resultados de cada una de las secciones de su IE en Matemática.

Tabla 2.3 *Resultados de su IE en 2.° grado de secundaria por secciones (cantidad de estudiantes)*

Secciones	Niveles de logro			
	Satisfactorio	En proceso	En inicio	Previo al inicio
Total				

En comparación con los resultados de la ECE 2016, los resultados nacionales de la ECE 2018 muestran un leve incremento del porcentaje de estudiantes que logran el nivel Satisfactorio en Matemática. En el caso de su IE, ¿se presenta la misma situación?

Para conocer los resultados nacionales, lo invitamos a revisar el Informe para la IE, el cual se encuentra en la siguiente dirección:

http://umc.minedu.gob.pe/resultados-ece-2018

3. ¿Cómo **evalúa** la **ECE**

Para evaluar las competencias matemáticas en 2.° grado de secundaria la prueba se basó en los aprendizajes descritos en los documentos curriculares vigentes[1]. Las preguntas de la prueba ponen en juego capacidades y conocimientos matemáticos a partir de situaciones reales o propias de la matemática escolar.

Capacidades por competencia

- **Resuelve problemas de cantidad**
  - Traduce cantidades a expresiones numéricas.
  - Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.
  - Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.
  - Argumenta afirmaciones sobre las relaciones numéricas y las operaciones.
- **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**
  - Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.
  - Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.
  - Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.
  - Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencias.
- **Resuelve problemas de forma, movimiento y localización**
  - Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.
  - Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.
  - Usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio.
  - Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas.
- **Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre**
  - Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.
  - Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.
  - Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.
  - Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

[1] Las denominaciones usadas en esta infografía se basan en el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB). Durante el proceso de construcción de la prueba se consideró la R.M. 199-2015. Cabe precisar que ambos documentos conciben el desarrollo de las competencias matemáticas a partir del enfoque de resolución de problemas.

en **Matemática?**

Conocimientos utilizados

- **Cantidad**
  Números racionales, operaciones y relaciones en este conjunto numérico.

- **Regularidad, equivalencia y cambio**
  Regularidades, proporcionalidad, expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones, relaciones, función lineal y afín.

- **Forma, movimiento y localización**
  Formas de dos o tres dimensiones, sus características, propiedades y medidas, transformaciones en el plano.

- **Gestión de datos e incertidumbre**
  Tablas y gráficos estadísticos, medidas de tendencia central y de dispersión; incertidumbre, enfoques de la probabilidad.

Contextos involucrados

- **Contexto extramatemático**
  Situación que recrea o simula la vida real, ya sea personal, pública o científica.

- **Contexto intramatemático**
  Situación en la que solo intervienen objetos y procedimientos matemáticos.

4. Niveles de logro en 2.° grado de secundaria

En la ECE, los estudiantes según sus respuestas en la prueba, se ubican en alguno de los siguientes niveles de logro: Satisfactorio, En proceso, En inicio y Previo al inicio.

Cada uno de los niveles de logro describe un conjunto de aprendizajes que logran los estudiantes. Esta descripción se construye sobre la base de la evidencia encontrada mediante las pruebas y guarda coherencia con lo establecido en el CNEB. Así, el nivel Satisfactorio concentra a los estudiantes que **logran los aprendizajes esperados** para el final de un determinado ciclo. En el nivel En proceso, se ubican los estudiantes que **logran parcialmente los aprendizajes esperados** para un determinado ciclo. El nivel En inicio agrupa a aquellos estudiantes que **logran aprendizajes muy elementales** respecto de lo que se espera para un determinado ciclo. Finalmente, el nivel Previo al inicio agrupa a aquellos estudiantes que **no logran los aprendizajes necesarios para estar en el nivel En Inicio**.

Por otro lado, para comprender los niveles de logro es necesario tomar en cuenta que estos son inclusivos. Por ejemplo, los estudiantes ubicados en el nivel Satisfactorio logran los aprendizajes descritos en los niveles En proceso y En inicio.

Nivel Satisfactorio

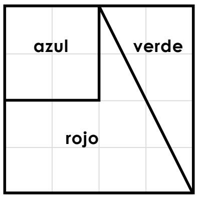
Los estudiantes de este nivel, además de lograr los aprendizajes de los niveles En proceso y En inicio, son capaces de formular y resolver problemas de varias etapas en los que interpretan situaciones, establecen conexiones entre diferentes nociones matemáticas, desarrollan procedimientos y realizan argumentaciones. En este nivel, los estudiantes logran aprendizajes como los siguientes:

- Interpretan los diferentes significados de las fracciones.
- Utilizan equivalencias entre fracciones, decimales y porcentajes.
- Plantean y resuelven desigualdades e inecuaciones lineales.
- Establecen relaciones entre dos variables, las evalúan y expresan matemáticamente.
- Usan lenguaje coloquial, numérico, gráfico y, a veces, algebraico en situaciones que requieren el uso de la función lineal y de las relaciones proporcionales.
- Resuelven situaciones que involucran propiedades de formas geométricas compuestas.
- Producen información a partir de gráficos y tablas estadísticas.
- Resuelven situaciones que involucran la interpretación de las medidas de tendencia central.
- Calculan la probabilidad de un evento a partir de su espacio muestral.

El nivel Satisfactorio describe lo que todo estudiante peruano debería lograr al finalizar el segundo grado de secundaria. No constituye un nivel destacado o de excelencia.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de tareas que logran resolver los estudiantes que se ubicaron en este nivel.

Se dibujó la siguiente bandera sobre papel cuadriculado.



¿Qué parte de la bandera es de color **rojo**?

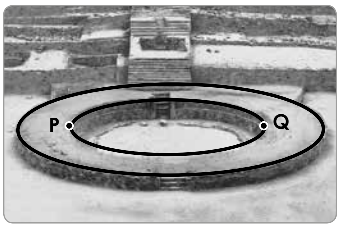
a) $\frac{1}{8}$ de la bandera. b) $\frac{1}{4}$ de la bandera.

c) $\frac{1}{3}$ de la bandera. d) $\frac{1}{2}$ de la bandera.

Interpreta el significado de la fracción, su equivalencia y sus diversas maneras de representarla.

La siguiente imagen muestra la plaza circular del Templo Mayor de la ciudad de Caral.

Plaza circular de Caral



Para un estudio exploratorio, cinco estudiantes midieron el diámetro $\overline{PQ}$ de esta plaza circular. El promedio de las medidas obtenidas fue de 22 m.

En la siguiente tabla, se registraron las medidas halladas por cada estudiante; sin embargo, no se muestra la medida de César.

Katy	Lucía	Fabiola	César	Julio
19 m	20 m	24 m	¿?	21 m

¿Cuál es la medida que obtuvo César?

a) 21 m
b) 22 m
c) 26 m
d) 84 m

Resuelve situaciones vinculadas a la interpretación de la media aritmética.

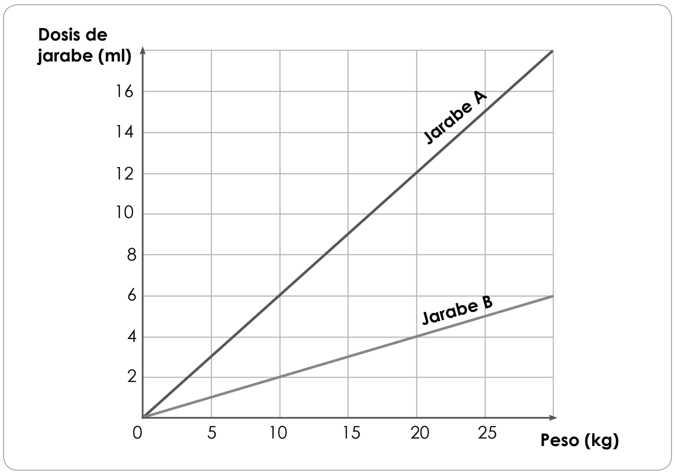
Nivel En proceso

Los estudiantes de este nivel, además de lograr los aprendizajes del nivel En inicio, formulan problemas en contextos diversos atendiendo algunas de las condiciones dadas en la tarea y resuelven problemas de hasta dos etapas en los que identifican, interpretan y aplican procedimientos con alguna conexión entre distintos campos temáticos. En este nivel, los estudiantes logran aprendizajes como los siguientes:

- Realizan algunas equivalencias usuales entre decimales, fracciones y porcentajes.
- Resuelven de manera intuitiva algunas ecuaciones lineales.
- Emplean la relación entre dos variables para encontrar el valor de una de ellas a partir de una información brindada.
- Identifican y verifican la expresión algebraica que modela una relación dada.
- Resuelven situaciones que involucran propiedades de formas geométricas simples.
- Interpretan tablas y gráficos estadísticos que representan el comportamiento de un conjunto de datos.
- Resuelven situaciones que requieren el manejo del promedio y de la noción elemental de probabilidad.

A continuación, se muestra un ejemplo de una tarea que logran resolver los estudiantes que se ubicaron en este nivel.

En la siguiente gráfica, se representa la relación entre el peso de un niño (en kilogramos) y las dosis (en mililitros) de dos jarabes que le ayudan a bajar la fiebre.



Según la gráfica mostrada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **incorrecta**?

- a) Por cada 5 kg que tenga un niño, le deben dar 3 mL del jarabe A.
- b) Si un niño pesa 30 kg, le deben dar 18 mL del jarabe A.
- c) Si un niño toma 5 mL del jarabe B, su peso debe ser 6 kg.
- d) Por cada 10 kg que tenga un niño, le deben dar 2 mL del jarabe B.

Interpreta la información de una gráfica que representa la relación entre dos variables (función lineal) vinculada a una situación problemática.

Nivel En inicio

Los estudiantes de este nivel resuelven problemas en contextos cercanos con algunos procedimientos y nociones elementales del grado. En este nivel, los estudiantes logran aprendizajes como los siguientes:

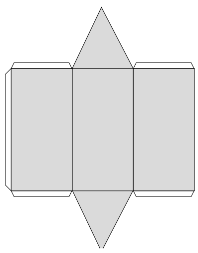
- Emplean de forma directa modelos aditivos y multiplicativos con números naturales, expresiones decimales y alguna expresión cotidiana referida a fracción.
- Utilizan la relación entre dos variables para encontrar el valor que corresponde a un dato explícito, así como para deducir equivalencias a través de una igualdad.
- Identifica el desarrollo (plantilla) de cuerpos geométricos más conocidos.
- Extraen datos a partir de gráficos y tablas estadísticas e identifican la ocurrencia de eventos.

A continuación, se muestra un ejemplo de una tarea que logran resolver los estudiantes que se ubicaron en este nivel.

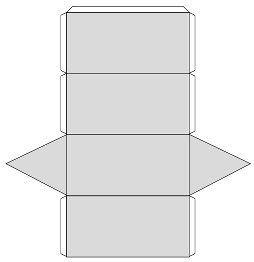
Una fábrica de chocolates planea empaquetar sus productos en cajas como la mostrada a continuación:

¿Cuál de las siguientes plantillas corresponde a la caja mostrada?

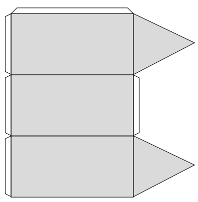
a



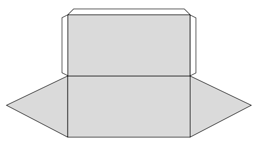
b



c



d



Identifica el desarrollo plano de un sólido.

Nivel Previo al inicio

Los estudiantes de este nivel no lograron los aprendizajes necesarios para estar en el nivel En inicio.

Es indispensable brindar una atención especial a los estudiantes que se ubican en los niveles En inicio y Previo al inicio. Este grupo de estudiantes requiere que los docentes les ofrezcan un acompañamiento más cercano para conseguir la mejora de sus aprendizajes.

5. ¿Qué aporta la ECE al trabajo de aula en 2.° grado de secundaria?

A partir de los resultados de la ECE, se brinda información sobre los logros y dificultades de los estudiantes, así como recomendaciones para facilitar y mejorar la gestión pedagógica del docente en el aula y fortalecer sus aprendizajes.

Esta sección se presenta de la siguiente manera para cada competencia.

- **Organizadores gráficos sobre las competencias.** Se brinda un panorama de los aprendizajes esperados para el grado según el currículo vigente.
- **Hallazgos sobre los aprendizajes logrados por los estudiantes.** Estos se encuentran expresados a través de logros y dificultades de algunos aspectos evaluados con la prueba. Por un lado, los logros muestran el razonamiento y algunas estrategias usadas por los estudiantes para llegar a sus soluciones. Por otro lado, las dificultades expresan interpretaciones equivocadas de los estudiantes que los condujeron al error.
- **Sugerencias para el trabajo en aula.** Se centran en la atención del proceso de aprendizaje de conceptos y en pautas para superar las dificultades en su enseñanza.

Competencia **Resuelve problemas de cantidad**

Sistema de numeración decimal (SND)

- Interpretar el valor de posición de las cifras de un número decimal.
- Comparar y ordenar números decimales.
- Componer y descomponer números en notación polinómica y científica.
- Establecer equivalencias entre unidades de medida.

Problemas aritméticos con números racionales

- Resolver o formular situaciones que involucran
  - ✓ estructuras aditivas.
  - ✓ estructuras multiplicativas.
  - ✓ potenciación con exponente entero y radicación.
  - ✓ porcentajes.
  - ✓ aumentos y descuentos porcentuales sucesivos.

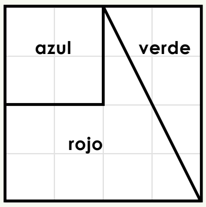
Número racional

- Interpretar y representar el número entero.
- Interpretar y representar el número racional.
  - ✓ Como fracción (parte-todo, medida, cociente, razón y operador).
  - ✓ Como decimal.
- Establecer equivalencias entre fracciones, decimales y porcentajes.

Hallazgo 1 en la competencia Resuelve problemas de cantidad

Los estudiantes tienen dificultades para interpretar la noción de fracción a partir de sus diversas representaciones. Para ilustrar este hallazgo, a continuación se presenta y analiza una tarea.

Se dibujó la siguiente bandera sobre papel cuadriculado.



¿Qué parte de la bandera es de color **rojo**?

a) $\frac{1}{8}$ de la bandera.

b) $\frac{1}{4}$ de la bandera.

c) $\frac{1}{3}$ de la bandera.

~~d)~~ $\frac{1}{2}$ de la bandera.

Competencia: Resuelve problemas de cantidad

Capacidad: Comunica y representa

Conocimiento: Noción de fracción como parte-todo

Nivel: Esta pregunta no fue requerida para lograr el nivel Satisfactorio

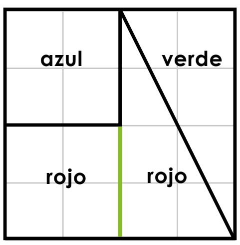
Respuesta correcta: d.
Esta alternativa fue elegida por el 26,4 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben interpretar la fracción como parte-todo continuo y expresarla en su representación simbólica. Esto implica que el todo quede dividido en partes equivalentes, de esta manera la respuesta será la alternativa "d". A continuación, se muestra las posibles soluciones de los estudiantes.

Descompone el todo en partes equivalentes.

Realiza trazos para determinar la parte de color rojo y el todo.

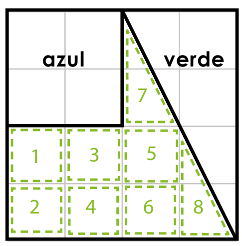


Rojo: 2 partes
Todo: 4 partes

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Identifica la parte y el todo a partir de sus áreas en unidades arbitrarias.

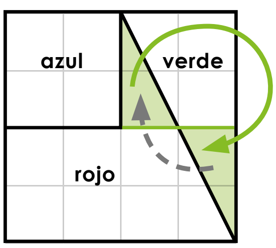
Cuenta y compone cuadraditos para determinar la parte y el todo.



$$\frac{\text{Rojo}}{\text{Total}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Descompone el todo y realiza movimientos.

Realiza trazos y gira partes de la figura para determinar la parte y el todo.



Es la mitad de la bandera.

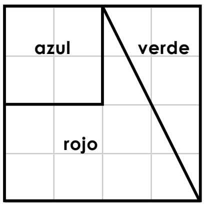
La interpretación gráfica de las fracciones como parte-todo, también demanda el manejo de habilidades y nociones geométricas fundamentales. Por ejemplo, requiere la visualización de figuras y la composición o descomposición de sus áreas.

Dificultades encontradas

Esta tarea de fracciones resultó ser difícil para la mayoría de los estudiantes a pesar de que explora uno de los significados de las fracciones más tratados a lo largo de la escolaridad. Esto puede deberse a que los estudiantes pocas veces analizan o reflexionan sobre situaciones en las que el todo ya no se encuentra dividido en partes "iguales". A continuación, se presentan las posibles soluciones que emplearon estos estudiantes.

Identifica inadecuadamente las partes.

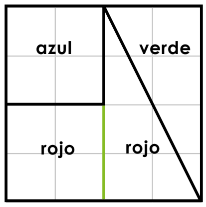
- Considera las partes mostradas como si fueran equivalentes.



$\frac{1}{3}$ de la bandera

Respuesta incorrecta: c.
Esta alternativa fue elegida por el 17,9 % de los estudiantes evaluados.

- Descompone la figura en 4 partes equivalentes y considera solo una de ellas.

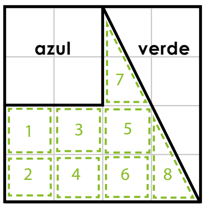


$\frac{1}{4}$ de la bandera

Respuesta incorrecta: b.
Esta alternativa fue elegida por el 9,7 % de los estudiantes evaluados.

Identifica inadecuadamente el todo.

Cuenta y compone cuadraditos de la parte de color rojo y los asocia con el denominador.

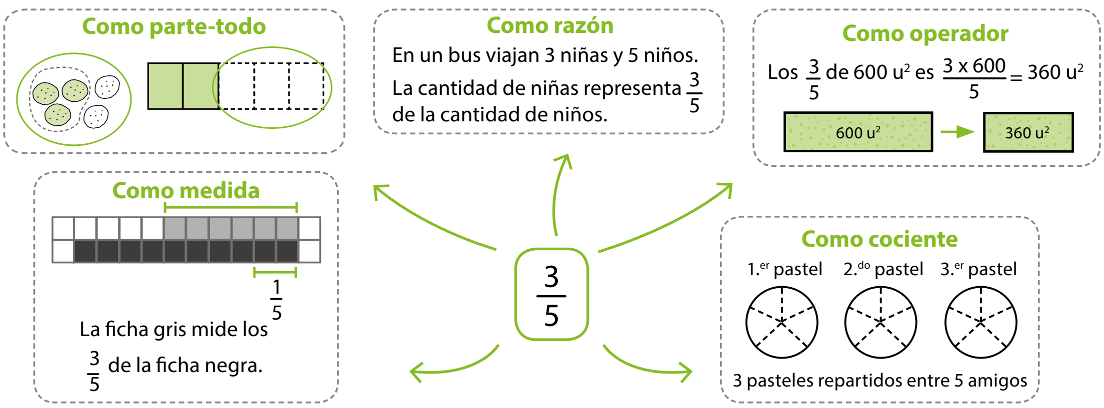


$\frac{1}{8}$ de la bandera

Respuesta incorrecta: a.
Esta alternativa fue elegida por el 45 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar la noción de fracción en el aula

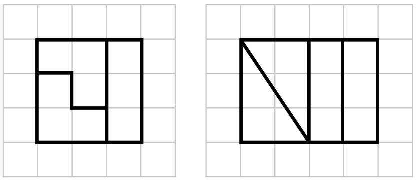
Al terminar 2.° grado de secundaria, los estudiantes deberían interpretar la fracción en sus diferentes significados[2], con cantidades continuas o discretas. Observa:



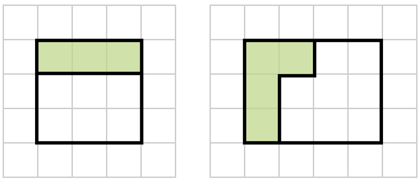
[2] Los significados de la fracción pueden ser revisados en Ministerio de Educación del Perú. (2013). *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado*. Lima: Ministerio de Educación del Perú. Pp161-163. Tomado de http://umc.minedu.gob.pe/evaluacion-muestral-2013/

Aunque el significado de la fracción como parte-todo es el que usualmente se trabaja en la escuela, el análisis de la tarea de la bandera (página 13), nos muestra que su tratamiento en el aula aún es superficial. A continuación, se proponen diversas situaciones que pueden favorecer la comprensión de la fracción como parte-todo.

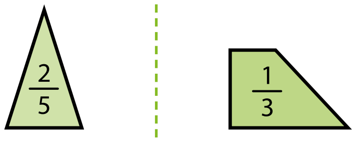
- **Considerar, además de partes congruentes, partes equivalentes con formas diferentes.** Por ejemplo:



- **Pedir que determine qué parte del todo es la región sombreada y que complete las divisiones del todo.** Por ejemplo:

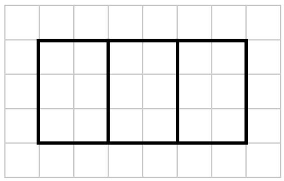


- **Mostrar solo una parte del todo y pedir representar el todo.** Por ejemplo:



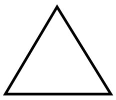
- **Usar fracciones equivalentes en un gráfico.** Por ejemplo:

Sombrear $\frac{5}{9}$ *de la figura dibujada en la cuadrícula.*



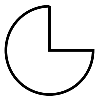
- **Usar diferentes formas para representar la unidad (o el todo).** Por ejemplo:

Unidad



Sombrear $\frac{1}{4}$ *de la unidad*

Unidad



Sombrear $\frac{1}{6}$ *de la unidad*

Hallazgo 2 en la competencia Resuelve problemas de cantidad

Los estudiantes tienen dificultades para establecer equivalencias entre números racionales en sus distintas representaciones. Para ilustrar este hallazgo, a continuación se presenta y analiza una tarea.

Una botella de agua tiene una capacidad de 2,5 litros.

¿Cuál de las siguientes expresiones equivale a la capacidad de esta botella?

a) $2\frac{1}{2}$ litros.

b) $2\frac{1}{5}$ litros.

c) $2\frac{2}{5}$ litros.

d) $2\frac{5}{2}$ litros.

Competencia: Resuelve problemas de cantidad

Capacidad: Comunica y representa

Conocimiento: Equivalencias entre números racionales

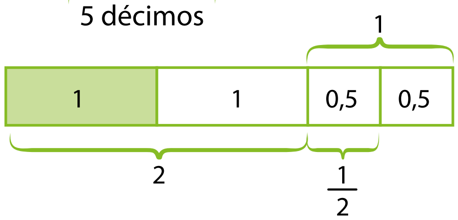
Nivel: Satisfactorio

Respuesta correcta: a.
Esta alternativa fue elegida por el 40,6 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben establecer una relación de equivalencia entre la expresión decimal y su representación fraccionaria, dando como respuesta la alternativa "a". A continuación, se muestran las posibles soluciones de los estudiantes.

Interpreta la equivalencia a partir de una descomposición.

- $2{,}5 = 2 + \underbrace{0{,}5}_{\text{5 décimos}} = 2 + \frac{5}{10} = 2 + \frac{1}{2} = 2\,\frac{1}{2}$
- 

Interpreta directamente la equivalencia.

Escribe todo el número como fracción decimal.

$2{,}5 \rightarrow \frac{25}{10} \rightarrow \frac{5}{2} \rightarrow 2\,\frac{1}{2}$ litros

Dificultades encontradas

Sin embargo, los estudiantes que marcaron las otras alternativas evidencian dificultades en la interpretación del número decimal y en su representación como fracción. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

Interpreta inadecuadamente la parte decimal de la expresión dada.

Asocia la cifra de la parte decimal con el denominador.

- $2\,\frac{1}{5}$ **Respuesta incorrecta: b.** Esta alternativa fue elegida por el 30,7 % de los estudiantes evaluados.
- $2\,\frac{2}{5}$ **Respuesta incorrecta: c.** Esta alternativa fue elegida por el 22,3 % de los estudiantes evaluados.

Interpreta parcialmente la equivalencia.

Identifica la equivalencia de 2,5 con $\frac{5}{2}$ pero vuelve a representar la parte entera en la expresión fraccionaria , lo que resulta $2\,\frac{5}{2}$.

Respuesta incorrecta: d.
Esta alternativa fue elegida por el 5,4 % de los estudiantes evaluados.

Estas dificultades evidencian la falta de comprensión de la noción de fracción, del número decimal y las equivalencias que se pueden establecer entre estas nociones.

Sugerencias para trabajar decimales en el aula

El análisis de la tarea de la botella de agua (página 15), nos muestra que los estudiantes presentan dificultades al interpretar inadecuadamente la parte decimal de un número racional. Estas dificultades también se manifiestan en errores al realizar otras tareas como:

Errores al establecer equivalencias

- 7 milésimas equivale a 7,1000
- 0,045 equivale a 45
- 2,45 es diferente a 2,450

Errores al operar y comparar

- 0,80 + 0,50 = 0,130
- 4,5 × 4,5 = 16,25
- 4,5 es menor que 4,15

Errores al interpretar propiedades

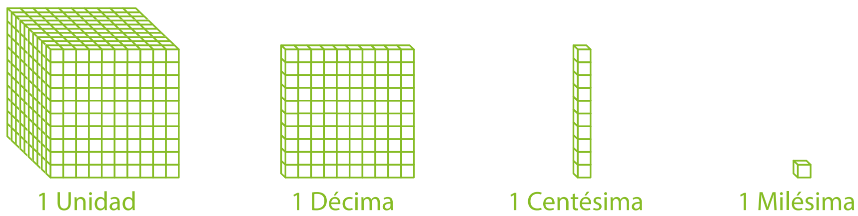
- Entre 4,5 y 4,6 no existe otro número decimal.
- Al multiplicar 2,3 por 0,4 resultará un número mayor que sus factores.

Para desarrollar una adecuada compresión de los numeros decimales se sugiere lo siguiente:

- **Generar actividades para construir de manera reflexiva el número decimal a través de equivalencias**

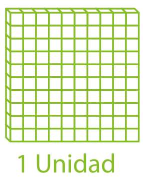
Para establecer la relación entre décimos y centésimos.

Observa las siguientes equivalencias:

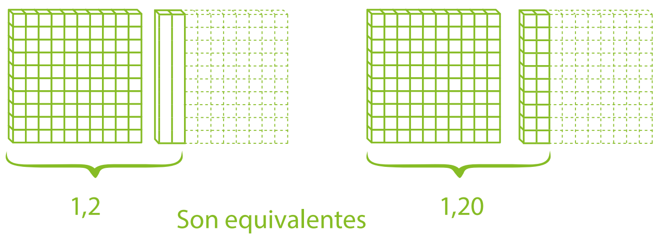


Sin usar la barra de los centésimos, ¿cómo representarías 20 centésimos?

También, puede usar otra unidad referencial.



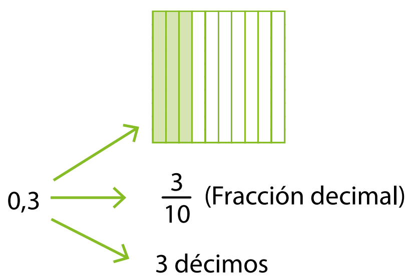
Según esta información,
¿1,2 es menor que 1,20? ¿Por qué?
Usa el material multibase como apoyo para tu argumentación.

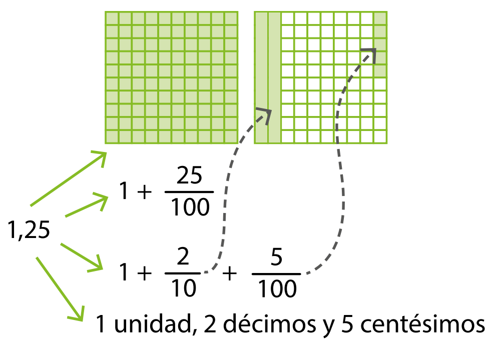


Si los estudiantes realizan actividades similares a esta, podrán visualizar e interpretar la equivalencia entre 2 décimos y 20 centésimos y no depender de una "regla" (agregar ceros a la derecha de la parte decimal) para evidenciarla.

- **Generar actividades que relacionen el número decimal con su fracción decimal a través de diferentes representaciones**

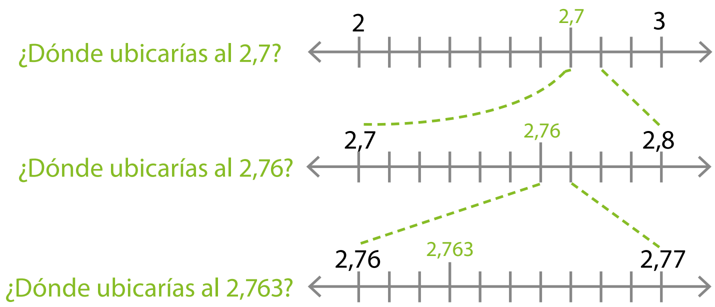
Las actividades relacionadas con la representación de los números decimales, aseguran la interpretación de la parte decimal como un valor menor a la unidad. Observe el siguiente ejemplo:





Generar actividades que involucren la comprensión del número decimal y su ubicación en la recta numérica

Durante este proceso, el estudiante podrá comprender que entre dos números racionales cualesquiera siempre hay otro número racional. Por ejemplo, para ubicar en la recta 2,763 se puede seguir el siguiente procedimiento.



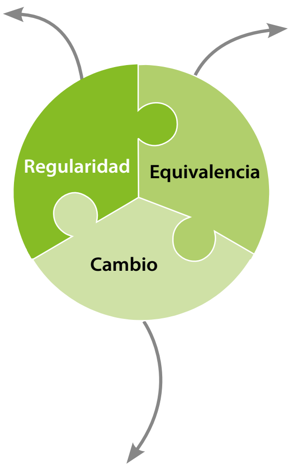
En este tipo de actividades, también se puede utilizar la cinta métrica para que los estudiantes representen y expliquen su razonamiento, al ordenar y comparar números decimales.

Es importante que al finalizar VI ciclo de la Educación Básica, los estudiantes comprendan el concepto de fracción y su vinculación con los decimales, ya que esto le permitirá consolidar el conjunto de los números racionales.

Competencia **Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio**

Patrones

- Interpretar situaciones de regularidad y traducirlas a patrones numéricos y gráficos.
- Establecer relaciones entre los elementos y la regla de formación de progresiones aritméticas con números enteros.
- Representar regularidades mediante expresiones verbales, gráficas, numéricas y algebraicas.



Igualdades y desigualdades

- Interpretar situaciones mediante ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita.
- Emplear estrategias para resolver ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita.
- Interpretar las propiedades que sustentan la igualdad o la simplificación de expresiones algebraicas.
- Establecer equivalencias usando representaciones icónicas o expresiones algebraicas.

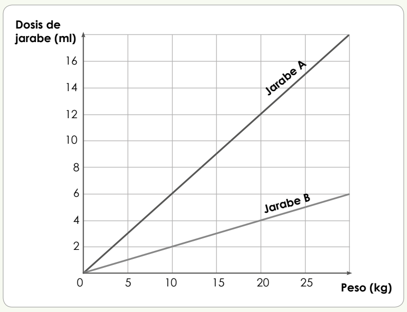
Relaciones y funciones

- Establecer relaciones de dependencia entre dos variables en situaciones problemáticas.
- Interpretar la relación entre la proporcionalidad directa y la función lineal.
- Analizar situaciones vinculadas a proporcionalidad directa e inversa, funciones lineales y afines.

Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio

Los estudiantes tienen dificultades para interpretar la representación gráfica de una función lineal en situaciones cotidianas. Para ilustrar este hallazgo, a continuación se presenta y analiza una tarea.

En la siguiente gráfica, se representa la relación entre el peso de un niño (en kilogramos) y las dosis (en mililitros) de dos jarabes que le ayudan a bajar la fiebre.



Según la gráfica mostrada, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **incorrecta**?

a) Por cada 5 kg que tenga un niño, le deben dar 3 ml del jarabe A.

b) Si un niño pesa 30 kg, le deben dar 18 ml del jarabe A.

~~c~~) Si un niño toma 5 ml del jarabe B, su peso debe ser 6 kg.

d) Por cada 10 kg que tenga un niño, le deben dar 2 ml del jarabe B.

Competencia: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Capacidad: Comunica y representa

Conocimiento: Función lineal

Nivel: En proceso

Respuesta correcta: c. Esta alternativa fue elegida por el 53,3 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben interpretar la información que proporciona la representación gráfica de la función lineal, dando como respuesta la alternativa "c". A continuación, se muestran algunas posibles soluciones de los estudiantes.

Identifica la regularidad numérica.

Para el jarabe B, según la gráfica.

+5 +5 +5 +5 +5 +5

kg	0	5	10	15	20	25	30
ml	0	1	2	3	4	5	6

+1 +1 +1 +1 +1 +1

Si un niño toma 5 ml del jarabe B, su peso debe ser 25 kg y no de 6 kg.

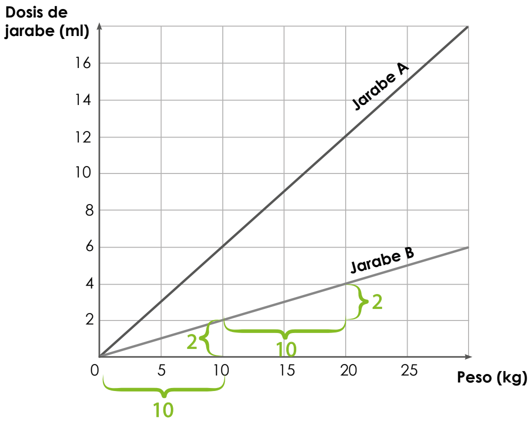
Identifica la respuesta basándose en la lectura del gráfico.

Para el gráfico del jarabe A → (5; 3) ✓ ; (30; 18) ✓

Para el gráfico del jarabe B → (6; 5) X ; (10; 2) ✓

Si el peso es 6 kg, la dosis del jarabe B es menos de 2 ml y no 5 ml como se menciona.

Interpreta la noción de pendiente como razón de cambio.



Jarabe B: 2 ml de este jarabe por 10 kg de peso (la pendiente es $\frac{2}{10}$).

Para 5 ml → $\underbrace{2\text{ml}}_{10\text{ kg}} + \underbrace{2\text{ml}}_{10\text{ kg}} + \underbrace{1\text{ml}}_{5\text{ kg}}$

Para 5 ml del jarabe B, le corresponde 25 kg de peso y no 6 kg.

Dificultades encontradas

Sin embargo, los estudiantes que marcaron las otras alternativas evidencian dificultades en la comprensión de la función lineal, al no interpretar el significado de sus elementos (como la pendiente) ni tampoco las escalas utilizadas en la gráfica. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

Confunde los ejes al leer el gráfico.

La afirmación "d" es incorrecta porque a 10 le debe corresponder un número mayor a 25 en el gráfico del jarabe B.

Respuesta incorrecta: d. Esta alternativa fue elegida por el 14,6 % de los estudiantes evaluados.

No interpreta adecuadamente las escalas del gráfico.

- La afirmación "a" es incorrecta porque a 5 kg le corresponde 3 ml de dosis del jarabe B, pero este valor no está en el gráfico.

  Respuesta incorrecta: a. Esta alternativa fue elegida por el 13,4 % de los estudiantes evaluados.

- La afirmación "b" es incorrecta porque el punto (30; 18) no se ve en el gráfico del jarabe A.

  Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 16,8 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar la interpretación de modelos lineales en aula

Como ha mostrado el análisis de la tarea del peso del niño y la cantidad de jarabe (página 19), los estudiantes tienen dificultades para inferir, en la gráfica de la función lineal, regularidades entre las variables involucradas o interpretar adecuadamente las escalas de la gráfica. Dado que este tipo de dificultades son muy frecuentes al abordar el estudio de la función lineal, a continuación se proponen algunas sugerencias:

Proponer tareas para analizar las relaciones de cambio

Para aportar a la comprensión del concepto de función, se debe analizar la relación de cambio entre dos magnitudes en diversas situaciones y en formatos distintos. En la siguiente situación, se puede solicitar la descripción del crecimiento de una planta en relación a los días transcurridos.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Altura de la planta (cm)	0	0	0	0	1	1	2	3	3	4
Cambio observado	Ha brotado una raíz de la semilla			El tallo está por salir		El tallo y raíces empiezan a crecer				

Proponer tareas sobre la dependencia entre variables

Se deben proponer situaciones en las que se identifiquen las variables involucradas y evaluar si existe una relación de dependencia entre ellas. No necesariamente esta relación tiene que ser lineal en todos los casos. En el recuadro de la derecha se muestran algunos ejemplos.

¿Existe una relación de dependencia en cada par de magnitudes que a continuación se presenta? ¿Por qué?

a) El peso de una persona y su altura.
b) La temperatura en la estación de verano y el precio del dólar.
c) El costo por compra de azúcar y la cantidad de kilogramos de azúcar.
d) El área de un rectángulo y su perímetro.

Proponer tareas cuyo propósito es identificar las relaciones de proporcionalidad entre variables

La relación de proporcionalidad directa permite dar el primer acercamiento al concepto de función, ya que esta relación se puede expresar como una función lineal. Además, permite interpretar la pendiente como una razón de cambio. En el recuadro de la derecha se presenta una actividad para empezar el estudio de este tipo de relaciones.

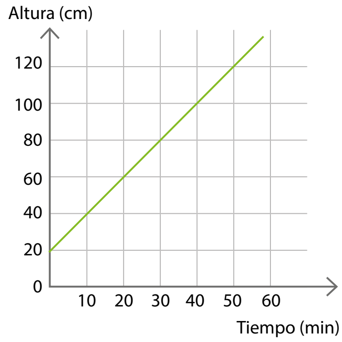
Evalúa en cuál de las siguientes situaciones existe una relación de proporcionalidad directa. Justifica tu respuesta.

a) La relación entre la cantidad de papa que se compra (en kilogramos) y el pago que se realiza por ella.
b) La relación entre la estatura de una persona y su edad.
c) La relación entre la longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.

Trabajar distintas representaciones que permiten expresar una relación funcional

El tránsito entre las diferentes representaciones de una función (verbal, numérica, gráfica y algebraica) permitirá una mejor interpretación, comprensión y comunicación de las relaciones de dependencia entre las variables y de los elementos que intervienen en dicha función. Así, se podrá desarrollar una concepción más amplia del concepto de función. Es por eso que se sugiere plantear tareas que involucren distintos tipos de representación.

Representación gráfica



Representación algebraica

x: tiempo
y: altura del nivel del agua al transcurrir el tiempo

$$y = 2x + 20$$

Representación verbal

La altura inicial del nivel del agua de un depósito es de 20 cm. Mientras se llena, se observa que el flujo de agua es constante y el nivel de agua sube a razón de 2 cm por minuto.

Representación numérica (utilizando una tabla)

T (min)	0	5	10	20	...
A (cm)	20	30	40	60	...

Proponer situaciones cotidianas que se expresen con modelos elementales de funciones

Es importante incorporar tareas que impliquen modelar una situación cotidiana, porque permitirá generalizar las interacciones entre los datos, valores desconocidos, variables y relaciones presentes en una situación, ya sea a través de una representación gráfica o algebraica. Por ejemplo, para la siguiente situación se podría utilizar un modelo lineal.

Situación cotidiana

Juan compra cierta cantidad de arroz en el mercado mayorista. Para llegar a este mercado, Juan gasta 5 soles en pasajes (incluye ida y vuelta). Se sabe que el precio de cada kilogramo de arroz en este mercado es de 3,50 soles. Expresa algebraicamente la relación entre el costo total a pagar por el arroz (en soles) y la cantidad de arroz comprado (en kilogramos).

Modelo lineal (función afín)

x: cantidad de arroz comprados (kg)

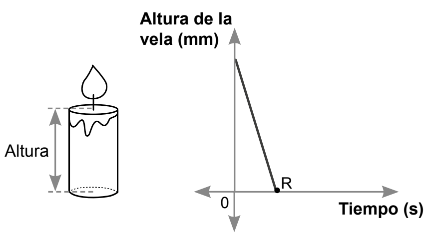
y: costo total por la compra de arroz (S/).

$$y = 3{,}5\,x + 5$$

Conocer las características de los modelos asociados a funciones

Los estudiantes pueden atender las características de una función al establecer relaciones cualitativas y cuantitativas entre las variables involucradas. Por ejemplo, considerando la siguiente situación para una función afín se puede explorar las características del modelo lineal a partir de preguntas como:

La siguiente gráfica representa la relación entre el tiempo que transcurre y la altura que alcanza una vela de base circular.

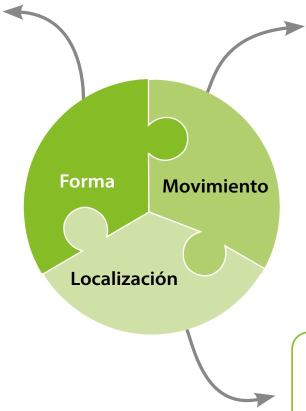


- ¿Cuáles son las variables involucradas en la situación?
- ¿Qué significado tiene el punto R en la gráfica?
- Plantea la relación entre el tiempo transcurrido y la altura de la vela.
- ¿Qué representa la inclinación de la gráfica de la función?

Competencia **Resuelve problemas de forma, movimiento y localización**

Formas bidimensionales y tridimensionales

- Modelar características de objetos mediante prismas, pirámides y polígonos y clasificarlos según sus propiedades.
- Construir con instrumentos formas bidimensionales.
- Comprender la semejanza y congruencia de formas poligonales.
- Interpretar las diferentes vistas de un sólido geométrico.
- Calcular el área o el perímetro de polígonos y círculos y establecer relaciones entre estas nociones.
- Calcular el área o volumen de primas y pirámides.



Transformaciones

- Describir y construir transformaciones de un objeto: ampliaciones, reducciones, reflexiones, traslaciones o rotaciones.

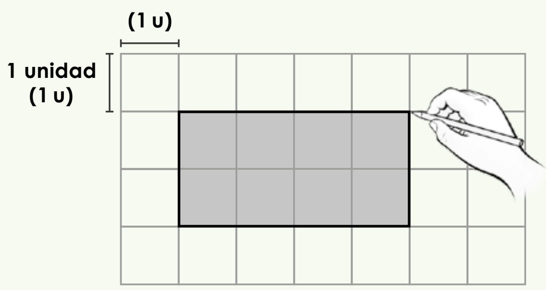
Localización

- Interpretar y describir la ubicación y desplazamiento de un objeto mediante coordenadas, planos o mapas a escala.

Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Los estudiantes presentan dificultades para comprender la relación entre el perímetro y el área de una figura en situaciones que promueven la argumentación. Para ilustrar este hallazgo, a continuación se presenta y analiza una tarea.

Bruno dibuja en un papel cuadriculado un rectángulo que tiene 12 unidades de perímetro. Observa:



Bruno afirma que **todo rectángulo que tenga 12 u de perímetro tendrá siempre 8 u² de área**.

¿Es correcto lo que afirma Bruno? Explica tu respuesta dando ejemplos.

Competencia: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Capacidad: Razona y argumenta

Conocimiento: Perímetro y área del rectángulo

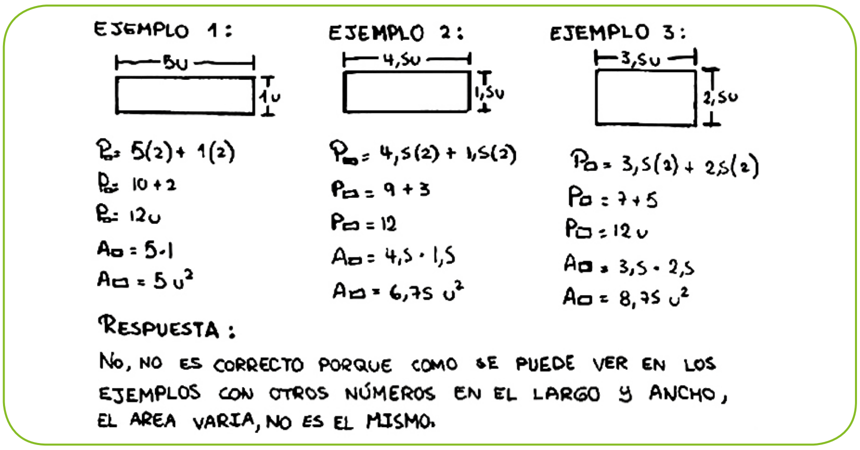
Nivel: Esta pregunta no fue requerida para lograr el nivel Satisfactorio

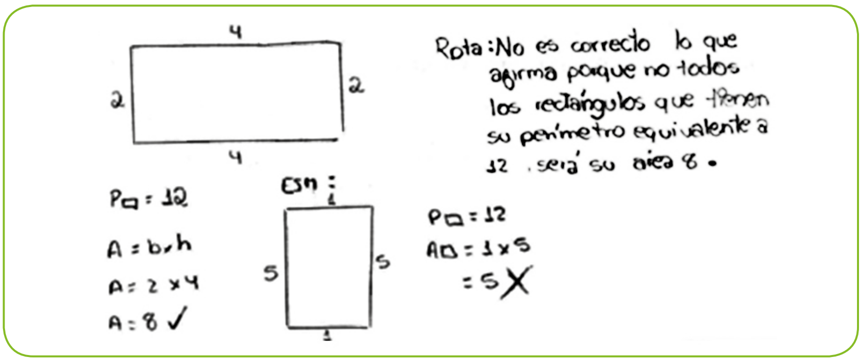
Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben justificar su decisión sobre la validez de una proposición vinculada a la relación existente entre el perímetro y el área del rectángulo. A continuación, se muestran algunas de las justificaciones dadas por los estudiantes.

Justifica su decisión a partir de casos que evidencian un mismo perímetro para regiones de distinta área.

Estos estudiantes toman en cuenta la información proporcionada y plantean al menos un caso que hace falsa a la proposición mediante el uso de representaciones verbales, gráficas o numéricas. Además, pueden utilizar números naturales o decimales para sustentar su respuesta y en ciertos casos usan la fórmula para encontrar distintos valores para el área.



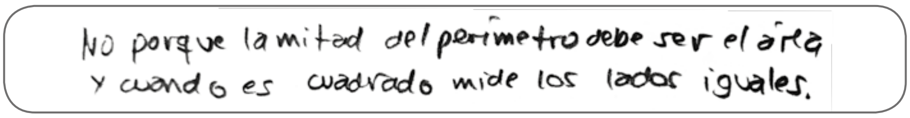


Dificultades encontradas

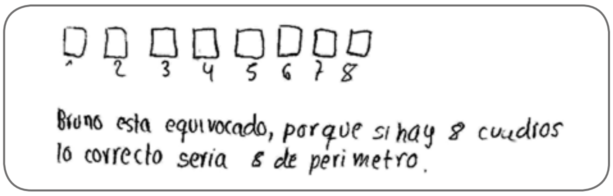
A pesar de que las nociones de área y perímetro se trabajan a lo largo de la escolaridad, los resultados de la ECE evidencian que establecer relaciones entre estos atributos medibles y justificar su postura al respecto es una tarea difícil para la mayoría de estudiantes. Esta dificultad se puede explicar por la falta de oportunidades de los estudiantes para enfrentarse a diversas tareas que involucran el cambio del perímetro y el área de una figura al variar la medida de sus lados. A continuación, se muestran algunas respuestas de estos estudiantes.

Justifica a partir de concepciones erradas sobre la relación entre área y perímetro.

- Estos estudiantes consideran que el valor del área es la mitad del perímetro.



- Estos estudiantes asumen que los valores para el perímetro y el área de una misma figura deben ser iguales. Además, no interpretan correctamente la proposición dada y relacionan la cantidad de cuadrados que componen al rectángulo con su perímetro.

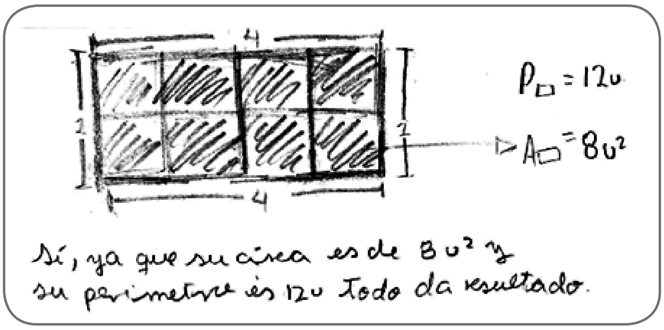


No interpreta la relación inclusiva de algunos cuadriláteros.

Estos estudiantes manejan adecuadamente las nociones de perímetro y área. Sin embargo, al no considerar que el cuadrado también es un rectángulo, no aceptan que el siguiente caso puede hacer falsa la proposición. Además, solo utilizan números enteros para justificar su respuesta, esto limita el análisis de otros casos que contradigan la proposición.

Reafirma la validez de la proposición sin interpretar el caso que hace falsa a la proposición.

Estos estudiantes no llegan a interpretar la proposición dada y solo se limitan a comprobar que los valores asignados al perímetro y área se corresponden con los del rectángulo. Sin embargo, evidencian conocer el cálculo (por algoritmo o conteo) de cada una de estas magnitudes.



Sugerencias para trabajar la relación entre perímetro y área que fomente la argumentación en aula

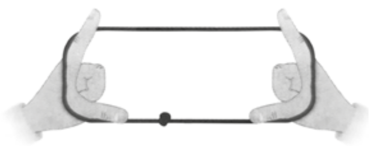
El tratamiento adecuado del área y el perímetro de una figura implica superar algunas creencias que tienen los estudiantes sobre cómo se relacionan estos conceptos. En el análisis de las dificultades de la tarea sobre la afirmación de Bruno (página 23) se ha encontrado algunas de estas creencias con respecto a la relación perímetro y área, por ejemplo:

- Si dos rectángulos tienen el mismo perímetro, entonces tienen la misma área.
- Si se duplica el área de una figura, entonces se duplica su perímetro.
- Si el perímetro de una figura es mayor que el perímetro de otra, entonces el área de la primera es mayor que el área de la segunda.

Para afrontar estas creencias, se pueden proponer tareas que impliquen, inicialmente, el uso de material concreto y que vayan acompañadas de propuestas que promuevan el razonamiento y la argumentación. A continuación, se brindan algunas sugerencias relacionadas al perímetro y el área del rectángulo.

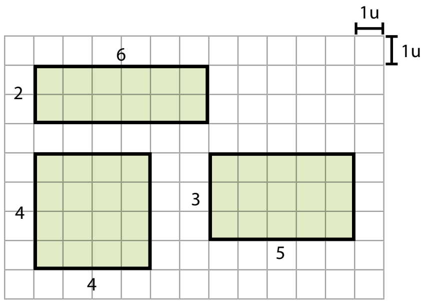
Usar diferentes representaciones para reflexionar sobre la variación del área de rectángulos con igual perímetro

a) Solicite a los estudiantes utilizar una cuerda, no elástica, atada por los extremos, que tenga una longitud de 1 m, por ejemplo. Los estudiantes deberán utilizar los dedos de cada mano para formar rectángulos, como se muestra en la imagen.



Esta actividad se desarrolla proponiendo algunas preguntas, por ejemplo: ¿Los rectángulos formados tienen el mismo perímetro? ¿Por qué? ¿Cómo lo podemos verificar? ¿Y la misma área? ¿Cuáles pueden ser algunos de los posibles valores para el largo y ancho de cada rectángulo? ¿Es posible formar con la cuerda un rectángulo de lados iguales?

b) Pida a los estudiantes graficar en una hoja cuadriculada, tres rectángulos diferentes que tengan 16 u de perímetro. Los estudiantes podrán dar respuestas como las que se muestran en la imagen de la derecha. Luego pregunte: ¿tendrán todos los rectángulos dibujados la misma área?



Después, solicite a los estudiantes que organicen en una tabla los valores hallados para las dimensiones de cada rectángulo dibujado, así como su perímetro y su área, tal como se muestra en la tabla.

Largo (u)	Ancho (u)	Perímetro (u)	Área (u²)
6	2	16	12
4	4	16	16
5	3	16	15

c) Invítelos a identificar regularidades a partir de la tabla. Proponga las siguientes indicaciones:

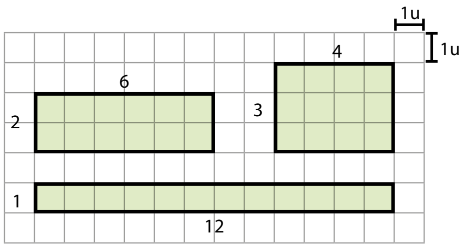
- Agregue en la tabla las dimensiones de dos rectángulos que tengan como perímetro 16 u.
- Encuentre la relación entre las medidas del largo y del ancho con el perímetro respectivo.

Finalmente, pregunte lo siguiente:

- Dos rectángulos con el mismo perímetro, ¿siempre tienen la misma área? ¿Por qué?
- En rectángulos con igual perímetro, ¿cuáles parecen ser las dimensiones que permiten obtener mayor área? ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que permite obtener menor área? ¿Qué pasaría si una de las dimensiones es cero? En cada caso, ¿qué relación observas entre el largo y el ancho del rectángulo con respecto al área?

Fomentar actividades que permitan reflexionar sobre figuras que tienen la misma área, pero distinto perímetro, con el uso de una cuadrícula

El uso de una cuadrícula facilita la construcción de figuras con igual área, lo cual permitirá elaborar conjeturas sobre la relación entre el perímetro y el área. Por ejemplo, solicite a los estudiantes dibujar tres rectángulos con $12u^2$ de área. Algunas de las posibles respuestas se muestra en la imagen de la derecha.



Luego, plantee lo siguiente:

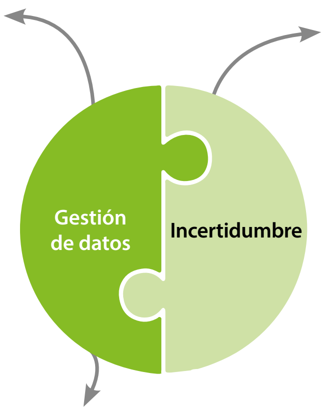
- Al variar las medidas del largo y ancho de los rectángulos, ¿qué ocurre con sus áreas?
- Calcula el perímetro de cada rectángulo. ¿Son iguales?
- Al relacionar el área y el perímetro, ¿a qué conclusión llegas?

El uso de material concreto, la experimentación y las diversas representaciones de las formas, sus características y propiedades, permiten que los estudiantes profundicen conceptos, establezcan nuevas relaciones y cuestionen sus creencias.

Competencia **Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre**

Recopilación y procesamiento de datos

- Identificar población y variables de estudio.
- Recolectar y registrar datos en tablas.
- Representar a través de tablas, gráfico de barras, histogramas, polígonos de frecuencia y gráficos circulares la información recogida.
- Determinar las medidas de tendencia central de los datos.



Análisis de situaciones de incertidumbre

- Determinar el espacio muestral de una situación aleatoria.
- Interpretar la probabilidad de un suceso para determinar si es seguro, probable o imposible.
- Representar la probabilidad a través de la regla de Laplace o mediante su frecuencia relativa.

Interpretación de datos

- Interpretar tablas y gráficos estadísticos y evaluar su pertinencia.
- Interpretar y comparar la información a partir de la medida de tendencia central utilizada para tomar decisiones.
- Evaluar la pertinencia del uso de las medidas de tendencia central.

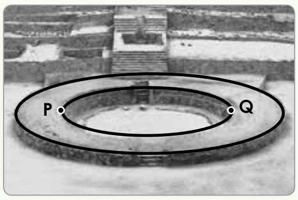
Hallazgo en la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Los estudiantes tienen dificultades para interpretar el significado de la media a partir de un conjunto de datos. Para ilustrar este hallazgo, a continuación se presenta y analiza una tarea.

La siguiente imagen muestra la plaza circular del Templo Mayor de la ciudad de Caral.

Para un estudio exploratorio, cinco estudiantes midieron el diámetro $\overline{PQ}$ de esta plaza circular. El promedio de las medidas obtenidas fue de 22 m.

Plaza circular de Caral



En la siguiente tabla, se registraron las medidas halladas por cada estudiante; sin embargo, no se muestra la medida de César.

Katy	Lucía	Fabiola	César	Julio
19 m	20 m	24 m	¿?	21 m

¿Cuál es la medida que obtuvo César?

a 21 m

b 22 m

c 26 m

d 84 m

Competencia: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Capacidad: Elabora y usa estrategias

Conocimiento: Medidas de tendencia central

Nivel: Satisfactorio

Respuesta correcta: c. Esta alternativa fue elegida por el 36,4 % de los estudiantes evaluados.

Logros de los estudiantes

Para resolver correctamente esta tarea, los estudiantes deben aplicar la noción de media aritmética para determinar el valor desconocido de un conjunto de datos. Probablemente, los estudiantes emplearon alguna de las siguientes estrategias dando como respuesta la alternativa "c".

Utiliza estrategias heurísticas.

Interpreta la noción de la media. Compensa los valores dados y llega a la media 22.

$$\underbrace{19 + 3}_{22} \quad \underbrace{20 + 2}_{22} \quad \underbrace{24 - 2}_{22} \quad \underbrace{x - 4}_{22} \quad \underbrace{21 + 1}_{22} \quad \rightarrow \quad x - 4 = 22 \rightarrow x = 26 \text{ m}$$

Utiliza estrategias algorítmicas.

- Interpreta la noción de la media como reparto equitativo.

$$\frac{19 + 20 + 24 + x + 21}{5} = 22$$

$$x + 84 = 110 \quad \rightarrow \quad x = 26 \text{ m}$$

- Busca un valor para llegar a 110 m (5×22 m).

19 m + 20 m + 24 m + 21 m = 84 m

Le falta 26 m para llegar a 110 m.

Dificultades encontradas

Sin embargo, los estudiantes que marcaron las otras alternativas evidencian dificultades al relacionar la búsqueda del valor desconocido con el uso inadecuado de algoritmos o al interpretar de forma errada la media. A continuación, se presentan los procedimientos que probablemente emplearon estos estudiantes.

Aplica un algoritmo sin interpretar la situación.

- Calcula el promedio de los 4 datos.

$$\frac{19 + 20 + 24 + 21}{4} = 21 \text{ m}$$

Respuesta incorrecta: a.
Esta alternativa fue elegida por el 5 % de los estudiantes evaluados.

- Calcula la suma de los valores dados.

$$19 + 20 + 24 + 21 = 84 \text{ m}$$

Respuesta incorrecta: d.
Esta alternativa fue elegida por el 8,6 % de los estudiantes evaluados.

Interpreta inadecuadamente la media.

Interpreta que al menos un dato debe ser 22 m ya que este es el valor de la media.

Respuesta incorrecta: b. Esta alternativa fue elegida por el 48,7 % de los estudiantes evaluados.

Sugerencias para trabajar las medidas de tendencia central en el aula

Como ha mostrado el análisis de la tarea anterior, una gran cantidad de estudiantes tienen dificultades en la interpretación de la media. Además, se tiene algunas consideraciones inadecuadas de los estudiantes, como las siguientes creencias:

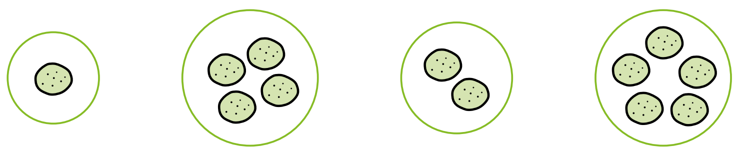
- La media indica que todos o algunos de los datos son iguales a ella.
- La media y la mediana siempre toman valores cercanos entre sí.
- La moda es la frecuencia más alta de un conjunto de variables.

Para reflexionar sobre estas dificultades y creencias, a continuación se propone las siguientes recomendaciones.

Proponer situaciones vinculadas a la interpretación de la media

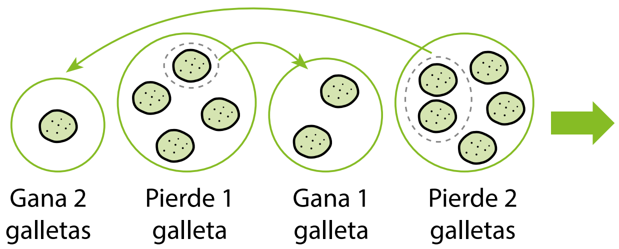
Obtener la media pasa por interpretar adecuadamente su significado. Una manera sencilla de introducirla, es a través de situaciones que involucren un reparto equitativo. Por ejemplo:

Mario quiere que cada plato mostrado, tenga la misma cantidad de galletas.



¿Cuántas galletas habrá en cada plato para que haya un reparto equitativo?

Al buscar realizar un reparto equitativo, Mario tendrá que "balancear" o "equilibrar" la cantidad de galletas que saca y pone en cada plato, tal como se muestra.



Luego de este reparto, todos los platos tendrán 3 galletas, que es justamente la media de la cantidad de galletas que habían inicialmente en cada plato.

Después de tener una idea más clara sobre el significado de la media, los siguientes ejemplos ayudarían a ampliar su comprensión, ya que puede promover discusión y reflexión entre los estudiantes al no tener respuestas únicas.

Uno de tres hermanos tiene 8 años. Si la media de sus edades es 8, ¿qué edades pueden tener los otros dos hermanos?

La media de las edades de tres hermanos es 6 años. ¿Qué edades pueden tener estos hermanos?

La media de las edades de tres hermanos es 5 años. Si el mayor tiene 8 años y el menor de todos tiene 3 años, ¿cuántos años tendrá el segundo hermano?

Vincular las medidas de tendencia central con su utilidad o pertinencia en una situación dada

En el tratamiento de las medidas de tendencia central, es importante asegurar su comprensión a través de actividades que promuevan evaluar y argumentar su pertinencia según la situación, la variable trabajada, las características de sus datos y el uso de variadas estrategias para su cálculo. Por ejemplo, se pueden plantear tareas como la siguiente:

Un vendedor ofrece 4 tipos distintos de calzado. El siguiente cuadro muestra la cantidad de calzados vendidos y sus ganancias obtenidas durante el 2018.

Tipo	Sandalias	Mocasines	Zapatillas	Botines
Cantidad de calzados vendidos	140	150	800	146
Ganancia anual por ventas (Soles)	7000	7500	40 000	7300

Según lo que se necesite determinar, variará la medida de tendencia central que conviene calcular y usar. Por ejemplo:

Si quiere saber en qué tipo de calzado debe invertir mayor cantidad de dinero el siguiente año.

Al vendedor le será más útil el cálculo de la moda para saber cuál es el tipo de calzado que se vende más, pues deberá invertir más en estos calzados.

Si quiere encontrar un valor que sea representativo de las ganancias obtenidas por las ventas de los distintos calzados durante un año.

Al vendedor le será más útil la mediana porque esta medida no se ve alterada por el valor extremo (40 000 soles). En cambio la media sí se ve distorsionada por este valor.

6. Formulación de problemas en el aula: sugerencias pedagógicas

Actualmente, la formulación de problemas recibe una especial atención en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, debido a que su práctica estimula la intuición, la creatividad, el pensamiento crítico y la integración de habilidades y conocimientos adquiridos. Además, favorece una actitud positiva hacia la Matemática, ya que el crear y resolver problemas despierta su motivación y curiosidad para profundizar sus conocimientos matemáticos.

Desde esta perspectiva, en esta sección del informe, se proponen algunas sugerencias para trabajar en el aula tareas vinculadas a la formulación de problemas a partir de los resultados de la ECE.

¿Cómo está constituido un problema?

Un aspecto importante para la construcción adecuada de un problema es identificar y discriminar cuáles son los elementos que lo constituyen. Malaspina (2013) considera cuatro elementos fundamentales en la estructura de un problema matemático. Estos elementos son: Información, Requerimiento, Contexto y Entorno matemático[4].

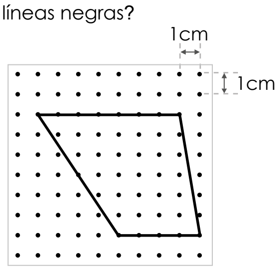
Estructura de un problema

Información	Requerimiento	Contexto	Entorno matemático
Se encuentra conformada por los datos y relaciones dadas en el problema.	Es lo que se pide encontrar en el problema. Puede ser cualitativo o cuantitativo.	Puede ser intramatemático o extramatemático.	Se encuentra conformado por los conocimientos matemáticos que intervienen en la solución.

Es importante considerar que algunos problemas pueden ser resueltos al emplear diferentes conocimientos, lo que implica que el entorno matemático no siempre será el mismo para todos los estudiantes.

A continuación, se muestran los elementos que estructuran el siguiente problema.

¿Cuál es el área de la figura delimitada por las líneas negras?



a) 18 cm²
b) 28 cm²
c) 33 cm²
d) 42 cm²

Estructura del problema

- **Información:** Distancia entre dos puntos (1 cm) y características de la figura mostrada.
- **Requerimiento:** Calcular el área de la figura delimitada por las líneas negras.
- **Contexto:** Intramatemático.
- **Entorno matemático:** Área de formas planas.

[4] Se puede profundizar en estos conceptos en Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevideo. Tomado de http://cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/727.pdf

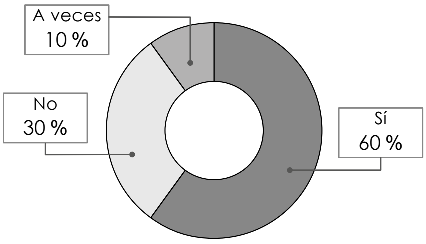
¿Qué evidencias se tiene desde la ECE?

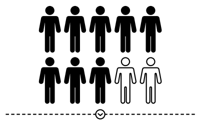
La siguiente imagen muestra una tarea de formulación propuesta a los estudiantes de segundo grado de secundaria.

Utiliza la información mostrada y crea un problema en el que hagas uso de lo que has aprendido en Matemática.

Pregunta propuesta a los estudiantes de la IE 3025 en el 2018

¿Practicas algún deporte?





En el 2017, 8 de cada 10 estudiantes de la IE 3025 **sí** practicaban algún deporte.

Competencia:
Resuelve problemas de cantidad

Capacidad:
Matematiza

Concimiento:
Porcentajes (u otras nociones como fracciones, decimales, razones, etc.)

A partir de la situación propuesta, los estudiantes pueden interpretar el significado del porcentaje, establecer relaciones de equivalencia y comparación entre números racionales, analizar e integrar información según la temporalidad y conjeturar a partir de supuestos, entre otros, para formular problemas.

A continuación, se muestran algunas respuestas de los estudiantes.

En un colegio preguntaron si ases deporte el 10% dijieron aveces, 30% no acen deporte y el 60% si ase deporta ¿cuantos alumnos no acen deporte si en total son 600 alumnos?

En la I.E Santa Teresita hay 200 estudiantes y de esos 200 estudiantes el 30% no juego tenis, ¿Cuántos estudiantes no juegan tenis?

En ambas situaciones, los estudiantes formulan problemas vinculados al cálculo del porcentaje. Para realizar este cálculo, incluyen una cantidad de referencia que no estaba considerada en la información inicial de la situación.

Posiblemente, estos estudiantes comprenden la noción de porcentaje como el operador de una cantidad que altera o cambia y crean un problema que puede ser resuelto en un solo paso. En contraste, otro grupo de estudiantes evidencia un manejo flexible de esta noción, ya que sus problemas involucran relaciones indirectas con el porcentaje y resoluciones de más de una etapa, tal como se observa en el siguiente ejemplo:

Si el Total de los q' hacen y aveses hace deporte fuese 140 estudiantes, ¿Que cantidad no hacen deporte

Este problema involucra una resolución de más de una etapa y manejo manejo flexible del porcentaje, ya que se debe conocer una cantidad referencial a partir de su valor porcentual.

Por otro lado, las principales dificultades que tienen los estudiantes se evidencian en los siguientes ejemplos:

> Hoy un grupo de jovenes que se ha hecho una encuesta y si practica algún deporte.

Desconocen la estructura de un problema

En el ejemplo mostrado, se evidencia que el problema carece de una estructura completa. Como se ha señalado, al formular un problema, el estudiante debe tener claramente definido cuál es la información que necesita para resolverlo, qué pregunta debe responder, qué conocimientos matemáticos puede utilizar y si su propuesta tiene coherencia en el contexto utilizado.

> cuantos estudiantes no practicaban ningun deporte en el 2018. si 30 estudiantes.

No comprenden la noción involucrada

En este ejemplo, el estudiante interpreta el porcentaje como el valor absoluto de una cantidad. Este problema permite afirmar que la formulación de problemas sirve para identificar los errores y las dificultades que tienen los estudiantes en la comprensión de una noción o en los procedimientos de su resolución, ya sea producto de sus creencias o de una interpretación inadecuada de las nociones aprendidas.

> El 56% de helado es lucuma, 14% vainilla y el porsentaje que sobra es de chocolate, sabemos que a 112 personas le gusta la lucuma ¿cuanta personas le gusta el chocolate

Omiten la información proporcionada para formular

A pesar de que el problema creado por el estudiante presenta una estructura adecuada, este omite toda la información proporcionada en la situación inicial. En este escenario, se sugiere graduar las condiciones o la cantidad de información que se proporciona para las tareas de formulación, ya que la complejidad de estas aumenta cuando se pide atención a más información y a las condiciones dadas en la situación que promueve la creación de problemas.

> si de 200 estudiantes practican deporte 86 y 93 no practican deporte ¿cuantos estudiantes Aveces practican deporte?

Involucran nociones matemáticas elementales para su grado

En este caso, el problema formulado por el estudiante tiene buena estructura y trata de mantener el contexto propuesto, a pesar que en el problema se omite información. Además, el problema vincula nociones matemáticas elementales para el grado del estudiante, como es el caso de las situaciones aditivas de varias etapas. Una manera de atender esta dificultad consiste en proponer tareas en las que se solicite explícitamente utilizar una noción matemática propia del grado. Por ejemplo, se puede indicar "Utiliza la información mostrada y formula un problema que se resuelva con progresiones aritméticas".

Este conjunto de dificultades posiblemente surgen por la complejidad misma de los conocimientos y habilidades matemáticas que se ponen en juego en este tipo de tareas. Sin embargo, ¿nuestros estudiantes reciben oportunidades para formular problemas? ¿Qué actividades se proponen en el aula para darles estas oportunidades? ¿Tenemos ideas sobre cómo proponer tareas de formulación a nuestros estudiantes de forma adecuada?

¿De qué maneras se puede desarrollar en el aula la habilidad para formular problemas?

Se puede iniciar a los estudiantes en la formulación de problemas al proponerles situaciones que los animen a problematizar. Por ejemplo, situaciones en las que no se necesiten del número para ser resueltas. Es decir, en las que se prescinda de una cantidad para encontrar una respuesta lógica y coherente a un problema dado. Veamos el siguiente ejemplo:

María compró un regalo y una torta para su sobrina. ¿En cuál de los dos productos gasto más? ¿Por qué?

Se sugiere que los estudiantes opinen libremente, sobre las posibles soluciones que pueden encontrar para este problema. El docente puede conducir esta actividad, a través de ejemplos, conjeturas, argumentaciones, etc. Se pueden plantear preguntas generales como: "¿qué aspectos tomarías en cuenta para resolver el problema?" o "¿cuáles pueden ser sus posibles respuestas? ¿Por qué?" O preguntas especificas como: "si el regalo es pequeño, ¿costará menos que la torta?", "si la torta se compró en oferta, ¿se gastará menos en ella?".

Al establecer relaciones cualitativas, los estudiantes interpretan los elementos que intervienen en la estructura de un problema y comprenden que su razonamiento más que el cálculo, les llevará a encontrar una respuesta adecuada y coherente a la situación involucrada.

A continuación, se proponen algunas otras situaciones que pueden ser aprovechadas por el docente para proponer tareas de formulación.

- **Formular un problema a partir de cambiar algunos datos de un problema dado**

  Luego de resolver un problema, se pide a los estudiantes que formulen un nuevo problema cambiando algunas condiciones o datos en este.

Problema dado: Con 12 m de cuerda, Santiago quiere cercar un terreno rectangular de 8 m^2 ¿Esto será posible? ¿Por qué?

Tarea propuesta

Ahora, formula un nuevo problema en el que se utilicen los 12 m de cuerda para marcar un nuevo terreno. ¿Qué forma podrá tener este nuevo terreno?

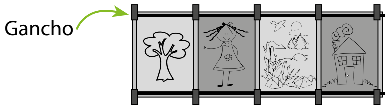
En esta tarea, el estudiante decide cuál es el elemento que quiere cambiar. Este puede ser la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático. Es decir, no pierde de vista la presencia de cada uno de ellos y, gradualmente, es consciente de cómo puede disminuir o aumentar la complejidad de la tarea respecto al problema dado.

- **Formular una pregunta a partir de una respuesta**

  Se pide que formulen una pregunta a partir de los datos y las condiciones dadas en una situación.

Utiliza la siguiente información y crea una pregunta cuya respuesta final sea "La maestra utilizó 42 ganchos".

Cecilia observa que su maestra utiliza ganchos para colgar las hojas de trabajo de sus compañeros de la siguiente manera.

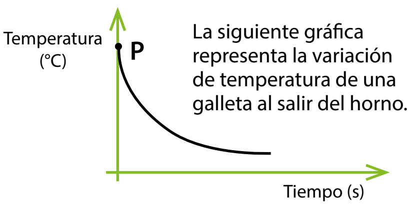


En situaciones de este tipo, los estudiantes tienen que atender a las relaciones que se pueden establecer entre los datos y las condiciones implícitas en el estímulo. Así, se podrán evaluar las variables involucradas y lograr la respuesta requerida.

- **Enunciados abiertos**

  Se presenta una situación (a través de una imagen, un esquema, una historia, una frase, etc.) y se les pide que formulen un problema con los conocimientos aprendidos en clase a partir de la información dada.

Utiliza la siguiente información y crea un problema con lo que has aprendido en Matemática.



En situaciones como esta el docente puede plantear preguntas que lleven a los estudiantes a identificar datos, establecer relaciones, ensayar condiciones, etc. Por ejemplo se puede preguntar "¿qué variables se relacionan en esta situación?", "¿por qué la gráfica es una curva y no una recta?", "¿qué relación encuentras entre las magnitudes?", "¿qué representa el punto P en la gráfica?".

Según la complejidad de las nociones matemáticas involucradas y las habilidades adquiridas por los estudiantes gradualmente, las tareas de formulación permitirán evidenciar el manejo flexible de una noción matemática y la comprensión de las relaciones establecidas entre las variables. Asimismo, pueden mostrar la atención que prestan los estudiantes a la estructura del problema creado, y el uso e integración de la información propuesta en la situación.

La formulación de problemas fomenta el desarrollo de las competencias matemáticas, ya que permite al estudiante problematizar y desarrollar su autonomía en situaciones vinculadas a una matemática significativa y útil para la vida.

Para acceder a los resultados generales de la ECE,
puede ingresar al sitio web del Sicrece.

SICRECE

Sistema de Consulta de Resultados de Evaluaciones

http://sicrece.minedu.gob.pe

Si usted tiene alguna consulta o comentario sobre este informe, comuníquese con nosotros:

docente_ece2018@minedu.gob.pe **Telf. (01) 615-5840**

Visite nuestro sitio web:
http://umc.minedu.gob.pe

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes
Ministerio de Educación
Calle Morelli 109, San Borja, Lima 41, Perú.