

# ¿Qué logran nuestros estudiantes en **Matemática**?

## 2.º grado de **Secundaria**

Tenemos el importante desafío de movilizar el cambio para que cada estudiante peruano logre aprendizajes de calidad en todos los grados y las áreas curriculares.

### Contenido

	Pág.		Pág.
1. ¿Para qué se deben usar los resultados de la ECE? .....	3	5. Logros y dificultades de los estudiantes en la prueba de Matemática .....	12
2. Resultados de su IE en Matemática .....	4	6. Sugerencias pedagógicas .....	33
3. ¿Cómo evalúa la ECE en Matemática? .....	6	Anexo .....	35
4. Descripción de los niveles de logro en Matemática .....	8		



# 1 • ¿Para qué se deben usar los resultados de la ECE?

El objetivo de este informe es ofrecer información que oriente la reflexión pedagógica sobre las distintas acciones que se pueden realizar en la institución educativa (IE) a partir de los resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE).

Además de los resultados cuantitativos, este documento presenta la descripción de los logros y las dificultades de los estudiantes que rindieron la prueba de Matemática en segundo grado de secundaria. Asimismo, brinda algunas recomendaciones y actividades pedagógicas que pueden ayudar en su quehacer diario en el aula.

En ese sentido, se espera que los resultados de la ECE se usen fundamentalmente para:

- ✓ **Fomentar la reflexión y el diálogo docente sobre los logros y las dificultades en Matemática** de los estudiantes de segundo grado de secundaria, pues dichos logros y dificultades pueden repercutir en grados posteriores dada la progresión de los aprendizajes de un ciclo a otro. Se sugiere, además, que esta reflexión se extienda a otras competencias no evaluadas en la ECE.
- ✓ **Diseñar estrategias pedagógicas innovadoras** que afiancen los aprendizajes logrados y atiendan a los estudiantes según sus necesidades de aprendizaje, en especial a aquellos que muestran mayores dificultades.

## Usos no deseados de la ECE

La ECE, al igual que toda evaluación nacional, mide el logro de algunas competencias y capacidades fundamentales mediante pruebas escritas. Si bien es un referente importante a nivel nacional, no reemplaza las estrategias ni los instrumentos de evaluación formativa que pueden emplearse en el aula; solo constituye uno entre varios indicadores que brindan evidencia sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Por tanto, para no distorsionar el proceso de aprendizaje de los estudiantes ni la finalidad de la ECE, es necesario evitar las siguientes prácticas:

- ✗ Enfocar la enseñanza únicamente en las competencias evaluadas en la ECE, pues ello implicaría desatender las otras competencias de las áreas evaluadas (como la escritura y la oralidad en Comunicación, por ejemplo), descuidar la enseñanza de otras áreas y dejar de lado el desarrollo de aspectos socioemocionales en la práctica pedagógica diaria.
- ✗ Reducir la enseñanza y la evaluación de la competencia matemática a la mera aplicación de pruebas escritas de opción múltiple (formato similar a la ECE).
- ✗ Concentrar los esfuerzos de mejora solo en los grados evaluados en la ECE, en perjuicio de los estudiantes de otros grados.

## 2. Resultados de su IE en Matemática

Se muestran los resultados alcanzados por los estudiantes de segundo grado de secundaria de su IE en Matemática. Es importante leer estos resultados junto a la descripción de los niveles de logro que encontrará en las páginas siguientes de este informe.

**Tabla 2.1** Resultados de su IE en 2.º grado de secundaria en Matemática

Niveles de logro	Su IE	
	Cantidad	Porcentaje
Satisfactorio		
En proceso		
En inicio		
Previo al inicio		
<b>Total</b>		

**Tabla 2.2** Resultados de su IE en 2.º grado de secundaria en Matemática, según sexo (cantidad de estudiantes)

Niveles de logro	Sexo	
	Hombre	Mujer
Satisfactorio		
En proceso		
En inicio		
Previo al inicio		
<b>Total</b>		

Se espera que la mayoría de los estudiantes se ubique en el nivel Satisfactorio, sin mayores diferencias entre hombres y mujeres. Si encuentra diferencias notorias, reflexione sobre qué situaciones podrían estar originándolas, por ejemplo:

- > ¿Son nuestras expectativas de aprendizaje en Matemática iguales para estudiantes hombres y mujeres?
- > Con frecuencia, se piensa equivocadamente que los hombres son mejores que las mujeres en Matemática. ¿Esta creencia extendida se encuentra presente de alguna manera en su institución educativa?

Asegúrese de brindar las mismas oportunidades de aprendizaje tanto a estudiantes mujeres como hombres.

A continuación, se presentan los resultados de cada una de las secciones de su IE en Matemática.

**Tabla 2.3** Resultados de su IE en 2.º grado de secundaria, por secciones (cantidad de estudiantes)

Secciones	Niveles de logro			
	Satisfactorio	En proceso	En inicio	Previo al inicio
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				
K				
L				
M				
N				
O				
P				
Q				
R				
S				
<b>Total</b>				

# 3. ¿Cómo evalúa la ECE

Se evalúa a partir de problemas que simulan situaciones de contexto real o que son propios de la matemática escolar. Estos problemas buscan que el estudiante ponga en juego capacidades y conocimientos matemáticos.

## Capacidades movilizadas

- > **Matematiza situaciones...**  
... al asociar situaciones con objetos matemáticos (números, formas, regularidades, sistemas, etc).
- > **Comunica y representa ideas matemáticas...**  
... al interpretar y expresar el significado de los objetos matemáticos mediante representaciones (como tablas, diagramas, gráficos, etc).
- > **Elabora y usa estrategias...**  
... al planificar y ejecutar estrategias heurísticas, procedimientos y estimaciones.
- > **Razona y argumenta generando ideas matemáticas...**  
... al hacer conjeturas, formular hipótesis, justificar y validar conclusiones, usando objetos matemáticos.

## Conocimientos utilizados

- > **Cantidad:**  
Números racionales, operaciones y relaciones en este conjunto numérico.
- > **Regularidad, equivalencia y cambio:**  
Regularidades, proporcionalidad, expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones, relaciones y función lineal.
- > **Forma, movimiento y localización:**  
Formas de dos o tres dimensiones, sus características, propiedades y medidas, transformaciones en el plano.
- > **Gestión de datos e incertidumbre:**  
Tablas y gráficos estadísticos, medidas de tendencia central y de dispersión; incertidumbre, enfoques de la probabilidad.



# en Matemática?



## Contextos involucrados

### > Contexto extramatemático

Escenario que recrea o simula una situación de la vida real, ya sea personal, pública o científica.

Se compra 12 m de alambre para hacer pulseras. En cada pulsera se utiliza 0,30 m de alambre. ¿Cuántas pulseras iguales se podrán hacer si se utiliza todo el alambre?

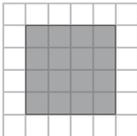
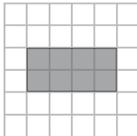
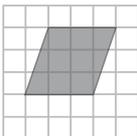
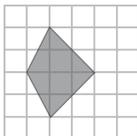
- a) 4 pulseras.                       b) 12 pulseras.  
 c) 30 pulseras.                       d) 40 pulseras.

### > Contexto intramatemático

Escenario abstracto donde solo intervienen objetos y procedimientos matemáticos.

El rombo es un cuadrilátero que tiene todos sus lados iguales.

¿Cuál de las siguientes figuras es un rombo?

- a)                        b) 
- c)                        d) 

## 4. Descripción de los niveles de logro en Matemática

En la ECE, de acuerdo con su puntaje individual, los estudiantes han sido ubicados en cuatro niveles de logro: Satisfactorio, En proceso, En inicio y Previo al inicio. Estos describen lo que sabe y puede hacer un estudiante cuyo puntaje está dentro de un determinado rango de habilidad.

Es importante resaltar que los niveles de logro son inclusivos. Esto significa que los estudiantes ubicados en el nivel Satisfactorio tienen alta probabilidad de responder adecuadamente las preguntas de este nivel y, también, de los niveles inferiores: En proceso y En inicio. De la misma manera, los estudiantes del nivel En proceso tienen alta probabilidad de responder adecuadamente las preguntas propias de este nivel y, a su vez, las preguntas del nivel En inicio.

Específicamente, los niveles de logro en Matemática se concretan de la siguiente manera:

### Nivel Satisfactorio

Logró los aprendizajes esperados.

Los estudiantes de este nivel, además de lograr los aprendizajes de los niveles En proceso y En inicio, son capaces de formular y resolver problemas en los que interpretan situaciones, establecen conexiones entre diferentes nociones matemáticas, desarrollan procedimientos o argumentan. Esto se puede expresar cuando:

- > Utilizan equivalencias entre fracciones, decimales y porcentajes.
- > Plantean y resuelven desigualdades e inecuaciones.
- > Establecen relaciones entre dos variables, las evalúan y expresan matemáticamente.
- > Usan un lenguaje coloquial, numérico, gráfico y, a veces, algebraico en situaciones que requieren el uso de la función lineal y de las relaciones proporcionales.
- > Producen información a partir de gráficos y tablas estadísticas.
- > Calculan la probabilidad de un evento.
- > Resuelven situaciones que involucran propiedades de formas geométricas compuestas.

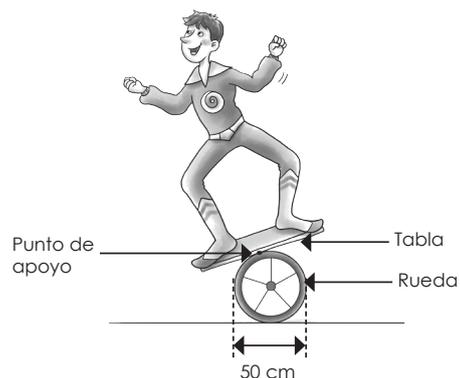
Algunos ejemplos de las preguntas que se ubicaron en este nivel son:

- Interpreta las propiedades básicas de la circunferencia en situaciones problemáticas.

Observa la figura del malabarista:

¿A qué distancia del centro de la rueda se encuentra el punto de apoyo de la tabla del malabarista?

- a) 10 cm       b) 25 cm  
 c) 50 cm       d) 72 cm



- Evalúa la pertinencia de gráficos estadísticos a partir de una situación problemática.

La tabla muestra el color favorito de los 14 niños de sexto grado:

Cantidad de niños según color favorito

Color favorito	Cantidad de niños
Rosado	3
Rojo	1
Blanco	2
Amarillo	2
Verde	1
Azul	5

Jaime y Lola representaron estos datos mediante gráficos distintos. Observa.

Gráfico de Jaime

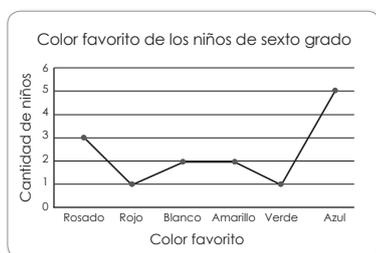
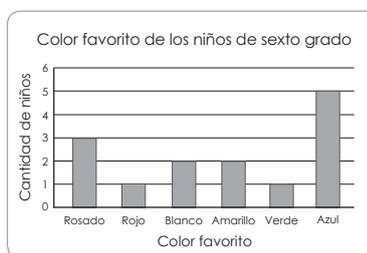


Gráfico de Lola



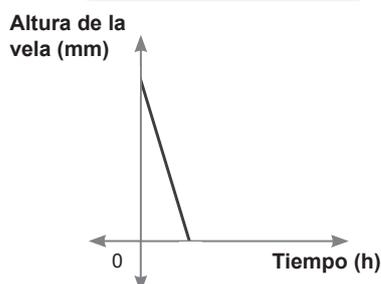
¿Quién representó los datos mediante un gráfico adecuado?

- a Jaime
- b Lola
- c Los dos representaron los datos mediante un gráfico adecuado.
- d Ninguno representó los datos mediante un gráfico adecuado.

- Interpreta el significado de la pendiente o de los interceptos de la gráfica de una función lineal que representa una situación problemática.

Se tiene una vela de forma cilíndrica de 60 mm de diámetro y 200 mm de altura. Una vez encendida, su altura disminuye de manera constante en 10 mm por hora. Esta situación se representa mediante una función. Observa su gráfica:

Gráfica de la función



En la situación, ¿qué representa la inclinación de la gráfica de la función?

- a La altura en el momento de inicio.
- b La variación del diámetro de la vela con respecto a su altura.
- c La variación de la altura de la vela en un tiempo determinado.
- d El tiempo en que la vela se consume totalmente.

## Nivel En proceso

Los estudiantes de este nivel, además de lograr los aprendizajes del nivel En Inicio, formulan problemas atendiendo a algunas de las condiciones solicitadas y pueden resolver problemas de hasta dos etapas en los que identifican, interpretan y aplican procedimientos con alguna conexión entre distintos campos temáticos. Esto se puede evidenciar cuando:

- > Utilizan números naturales y algunas equivalencias usuales entre decimales, fracciones y porcentajes.
- > Manejan, de manera elemental, ecuaciones.
- > Emplean la relación entre dos variables para encontrar el valor de una de ellas, a partir de los datos proporcionados.
- > Identifican y verifican la expresión algebraica que modela una relación dada.
- > Interpretan gráficos y tablas estadísticas, y resuelven situaciones que requieren el manejo del promedio y de la noción elemental de probabilidad.
- > Resuelven situaciones en las que hacen uso de la noción de figura geométrica simple.

A continuación, se presentan algunas preguntas que lograron resolver los estudiantes que se ubicaron en este nivel.

- Resuelve situaciones problemáticas que involucran el producto cartesiano con números racionales.

En el quiosco escolar ofrecen tres tipos de jugo: mango, papaya y durazno. También preparan dos clases de sándwiches: de queso y de palta. En el refrigerio, Luis pedirá jugo y un sándwich. ¿Cuántas formas diferentes de hacer su pedido tendrá Luis?



6



5



3



12

- Resuelve situaciones problemáticas que involucran la noción de la probabilidad de un suceso o evento.

En una caja se colocan bolas de igual tamaño. En la caja hay: 4 bolas azules, 3 bolas verdes, 2 bolas rojas y 1 bola amarilla. Si se saca al azar una bola de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color verde?

a  $\frac{1}{10}$

b  $\frac{1}{3}$

c  $\frac{3}{10}$

d  $\frac{3}{1}$

## Nivel En inicio

Los estudiantes de este nivel resuelven problemas, en contextos cercanos, con algunos procedimientos y nociones elementales del grado. Esto se puede evidenciar cuando:

- > Emplean de forma directa modelos aditivos y multiplicativos con números naturales, expresiones decimales y alguna expresión cotidiana referida a fracción.
- > Utilizan la relación entre dos variables para encontrar el valor que corresponde a un dato explícito, así como para deducir equivalencias a través de una igualdad.
- > Extraen datos a partir de gráficos y tablas estadísticas e identifican la ocurrencia de eventos.
- > Reconocen el desarrollo (plantilla) de cuerpos geométricos usuales.

A continuación, se presenta una pregunta que lograron resolver los estudiantes que se ubicaron en este nivel.

- Resuelve situaciones aditivas (comparación o igualación) utilizando números racionales.

Cuando Zenaida llega al grifo, observa el letrero de precios y se da cuenta de que no aparece el precio del galón de gasolina Tipo "B".

Al preguntar por dicho precio, el grifero le contesta que cuesta S/ 3,50 menos que el galón de gasolina Tipo "A".

¿Cuánto cuesta el galón de gasolina Tipo "B"?

GALÓN DE GASOLINA		GRIFO "EL VELOZ"		
TIPO A	S/	17	39	
TIPO B	S/			
TIPO C	S/	12	99	

a S/ 20,89

b S/ 14,29

c S/ 13,89

d S/ 9,49

## Nivel Previo al inicio

Los estudiantes presentan dificultades para resolver, incluso, las preguntas más sencillas de la prueba. Por tanto, no se tiene evidencia suficiente para describir sus aprendizajes.

## 5. Logros y dificultades de los estudiantes en la prueba de Matemática

En esta parte, se presentan los principales logros de aprendizaje alcanzados por los estudiantes en Matemática, destacando su sentido, sus conexiones y su importancia. También, se abordan las dificultades que todavía persisten e impiden que los estudiantes logren los aprendizajes previstos. La presentación está organizada en cuatro bloques identificados mediante los respectivos organizadores de conocimientos.

### 5.1. Cantidad: Significados y usos del número racional

Los estudiantes del segundo grado de secundaria a diario enfrentan situaciones que involucran cantidades de diverso tipo. Un conjunto de estas cantidades se expresan mediante números racionales. El siguiente organizador visual muestra algunos aspectos involucrados en la construcción de la noción de número racional.



<sup>1</sup> Los significados se asocian mayoritariamente a fracción y estos pueden ser revisados en el anexo D del *Informe de evaluación de Matemática en sexto grado* (Minedu, 2013).

<sup>2</sup> En su texto *Matemáticas para aprender a pensar*, Vila y Callejo sostienen que las creencias son un conocimiento subjetivo construido por la experiencia, la observación directa o la información. Están relacionadas con las actividades matemáticas, la forma cómo se piensa acerca de estas, los sujetos que la hacen y la enseñanza-aprendizaje de esta disciplina.



### Reflexione para mejorar su labor pedagógica

- ¿Qué creencias acerca de los números racionales ha identificado en sus estudiantes?
- ¿Qué significados de la fracción manejan sus estudiantes? ¿Cómo los relacionan con los números racionales?
- ¿Cómo pueden interpretar una forma de representación y transformar esta en otra forma equivalente?
- ¿En qué situaciones de la vida cotidiana usan de manera pertinente los números racionales? ¿En qué casos pueden estimar utilizando fracciones?

### ► Ejemplo 1.

Martín afirma lo siguiente:

"El 20 % siempre es menor que el 50 %"

Propón un ejemplo para probar que la afirmación de Martín **NO** se cumple.

Desarrolla aquí tu respuesta.

#### Características de la pregunta

**Nivel de logro:** Satisfactorio

**Capacidad:** Razona y argumenta

**Contenido:** Porcentaje

**Contexto:** Intramatemático

**Respuesta:** abierta

*Se busca que el estudiante, basado en su noción o concepto de porcentaje, plantee un contraejemplo a lo expresado por Martín.*



### Proyecte qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta

- ¿Probarían aplicando los porcentajes a la misma cantidad? ¿Aplicarían cada uno de los porcentajes a distintas cantidades? ¿Discriminarían qué cantidades son pertinentes para esa prueba?

### Logro: Experimentalmente encuentran un ejemplo que contradice el enunciado propuesto

Estos estudiantes deciden aplicar cada uno de los porcentajes a dos números diferentes, pues si los aplicaran siempre a la misma cantidad no encontrarían un ejemplo que contradiga a lo afirmado por Martín.

Posiblemente exploran con distintos valores y, a partir de lo experimentado, concluyen que el 20 % debe aplicarse a una cantidad mucho mayor a la que se aplica el 50 %. Observe las siguientes respuestas:

1) En el aula del 2do año "B" hay 100 estudiantes y el 20% es  
→ 20 estudiantes

2) En el aula del 2do año "D" hay 30 estudiantes y el 50% es  
→ 15 estudiantes

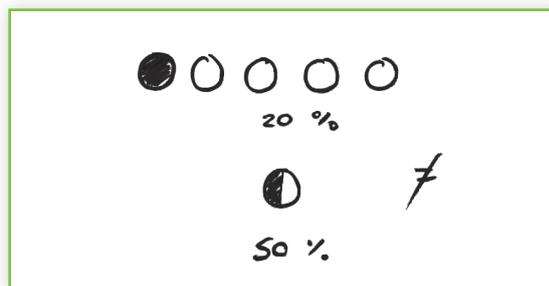
∴ podemos comprobar que no siempre el 20% es menor que el 50%

Una generalización de este proceso se evidencia cuando el estudiante indica la condición relativa del porcentaje con dependencia de la cantidad a la que se aplica. Observe:

$20\% \cdot 500 = 100$  es mayor a  $50\% \cdot 80 = 40$   
porque depende del número al que le saques porcentaje

**Logro: Visualizan la situación que contradice la afirmación propuesta y la expresan mediante un recurso gráfico**

Algunos estudiantes utilizan un gráfico para representar una situación en la cual la afirmación de Martín no se cumple. En el siguiente caso se observa el uso de unidades de una magnitud discreta para ejemplificarla; otros pudieron haber usado superficies continuas.



**Dificultad: Interpretan el porcentaje como un valor independiente de la cantidad a la que se aplica**

Algunos estudiantes ignoran que el porcentaje es un valor relativo que se aplica a determinada cantidad. Por ello, erróneamente comparan de manera directa los valores 20 y 50, de modo que concluyen que lo afirmado por Martín es cierto: que el 20 % siempre es menor que el 50 %. Obsérvelo en este caso:

Sabemos 50 si siempre <sup>si</sup> se cumple porque como  
por eso la aproximación <sup>es mayor</sup> que 20  
no se cumple.

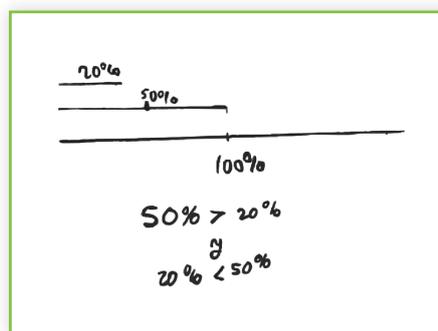
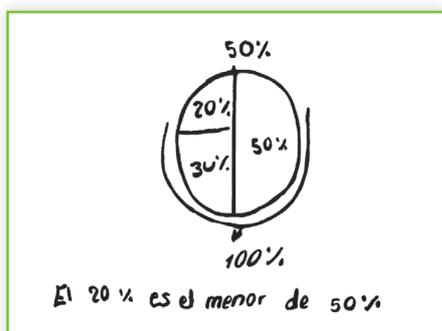
$$20 < 50 //$$

### Dificultad: Aplican los valores porcentuales a la misma cantidad

Algunos estudiantes asumen con rigidez, que los dos valores porcentuales dados deben aplicarse siempre a la misma cantidad, de modo que concluyen que lo afirmado por Martín es cierto. Los siguientes ejemplos muestran esta dificultad:

no se puede porque el 20% siempre es menor que el 50%.

Ejm:  $20\%$  de 100 = 20  $\rightarrow$   $20 < 50$   
 $50\%$  de 100 = 50



### ¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?

Una cantidad apreciable de estudiantes tiene dificultades para interpretar y utilizar con pertinencia los porcentajes. Una de las razones posiblemente tenga que ver con la manera cómo se ha enfocado la enseñanza de los porcentajes, especialmente su significado y usos. Considere reajustes a partir de las siguientes preguntas.

- ¿Qué significado de porcentaje de una cantidad estamos construyendo conjuntamente con ellos?, ¿cuánta importancia le damos?, ¿y a los procedimientos de cálculo?
- La representación adecuada puede ayudar a la comprensión y el buen uso del porcentaje. ¿Qué formas variadas de representación promovemos en el manejo de los porcentajes?
- Siendo este un conocimiento de uso extendido en la vida cotidiana, ¿qué ideas y creencias acerca de porcentajes van asimilando nuestros estudiantes? ¿Cómo actuamos ante ellas?
- Los conocimientos y usos del porcentaje se realizan desde el último ciclo de la educación primaria. ¿Qué nociones y prácticas han desarrollado nuestros estudiantes en su experiencia escolar? ¿Con qué actividades podemos rectificar, ampliar o profundizar aquellos conocimientos?

## ► Ejemplo 2.

La fábrica de detergentes "Espuma" brinda la siguiente oferta para las bolsas de 500 gramos. Observa.



¿Cuántos gramos adicionales de detergente brinda esta oferta?

- a 600 gramos.       c 400 gramos.  
 b 550 gramos.       d 100 gramos.

### Características de la pregunta

**Nivel de logro:** En proceso

**Capacidad:** Matematiza

**Contenido:** Fracción

**Contexto:** Extramatemático

**Respuesta:** d

*Se deben interpretar las condiciones presentes en la situación y asociarla con cierta estructura matemática, de modo que al aplicar el procedimiento pertinente se pueda obtener la respuesta.*



### Proyete qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta

- ¿Cómo interpretarían la información dada por el gráfico?
- ¿A qué cantidad aplicarían  $\frac{1}{5}$ ? ¿Harían alguna otra operación adicional?

### Logro: Utilizan el significado de la fracción como operador

Un grupo de estudiantes probablemente interpretó que la fracción  $\frac{1}{5}$  opera o se aplica a los 500 gramos para determinar la cantidad adicional de detergente, de modo que desarrollaron formas de establecerla. Una de estas podría ser la siguiente:

$$\frac{1}{5} \text{ de } 500 \text{ gramos} = \frac{1}{5} \times 500 = 100 \text{ gramos}$$

La respuesta indicaría el uso adecuado del significado de la fracción como operador.

### Logro: Utilizan el significado de la fracción como parte-todo

Otros estudiantes podrían haber representado gráficamente la cantidad total de detergente. Luego, interpretaron que ese total tiene que ser dividido en 5 partes equivalentes, una de las cuales representaría la cantidad de gramos adicionales. Mediante el cálculo mental o escrito, llegarían a la conclusión de que la cantidad adicional es 100 gramos.

100	100	100	100	100
-----	-----	-----	-----	-----

Mediante el cálculo mental o escrito, llegarían a la conclusión de que la cantidad adicional es 100 gramos.

Estos estudiantes ponen en evidencia el uso del significado parte-todo de una fracción, el cual es complementado por la habilidad de representación gráfica.

**Dificultad: Interpretan inadecuadamente el valor solicitado al hacer uso de una supuesta “palabra clave”**

- > Los estudiantes que optaron por dar como respuesta 600 gramos posiblemente interpretaron —de manera incorrecta— que la tarea consistía en conocer la cantidad total de detergente incluyendo los 100 gramos de la oferta, tal vez, influenciados por el uso del término “más”. Por ello es que habrían desarrollado el siguiente proceso:

$$\frac{1}{5} \text{ de } 500 \text{ gramos} = \frac{1}{5} \times 500 = 100 \text{ gramos}$$

$$500 + 100 = 600 \text{ gramos} \longrightarrow \text{Rpta. a) } 600 \text{ gramos}$$

- > Una variante de esta dificultad la presenta otro grupo de estudiantes, quienes posiblemente se equivocan en el cálculo de  $\frac{1}{5}$  de 500 y obtienen 50, cantidad que luego adicionan a 500.

$$\frac{1}{5} \text{ de } 500 \text{ gramos} = \frac{1}{5} \times 500 = 50 \text{ gramos}$$

$$500 + 50 = 550 \text{ gramos} \longrightarrow \text{Rpta. b) } 550 \text{ gramos}$$

**Dificultad: Interpretan inadecuadamente la situación planteada**

Los estudiantes que identificaron como respuesta 400 gramos posiblemente interpretaron que la oferta de los 100 gramos ya estaba incluida en los 500 gramos, por lo que decidieron quitarlos de esta cantidad, pese a que el gráfico indica lo contrario.

$$\frac{1}{5} \text{ de } 500 \text{ gramos} = \frac{1}{5} \times 500 = 100 \text{ gramos}$$

$$500 - 100 = 400 \longrightarrow \text{Rpta. c) } 400 \text{ gramos}$$

Al parecer estos estudiantes, al igual que los del caso anterior, tienen como dificultad principal la comprensión de la situación problemática más que el manejo de alguno de los significados de la fracción.

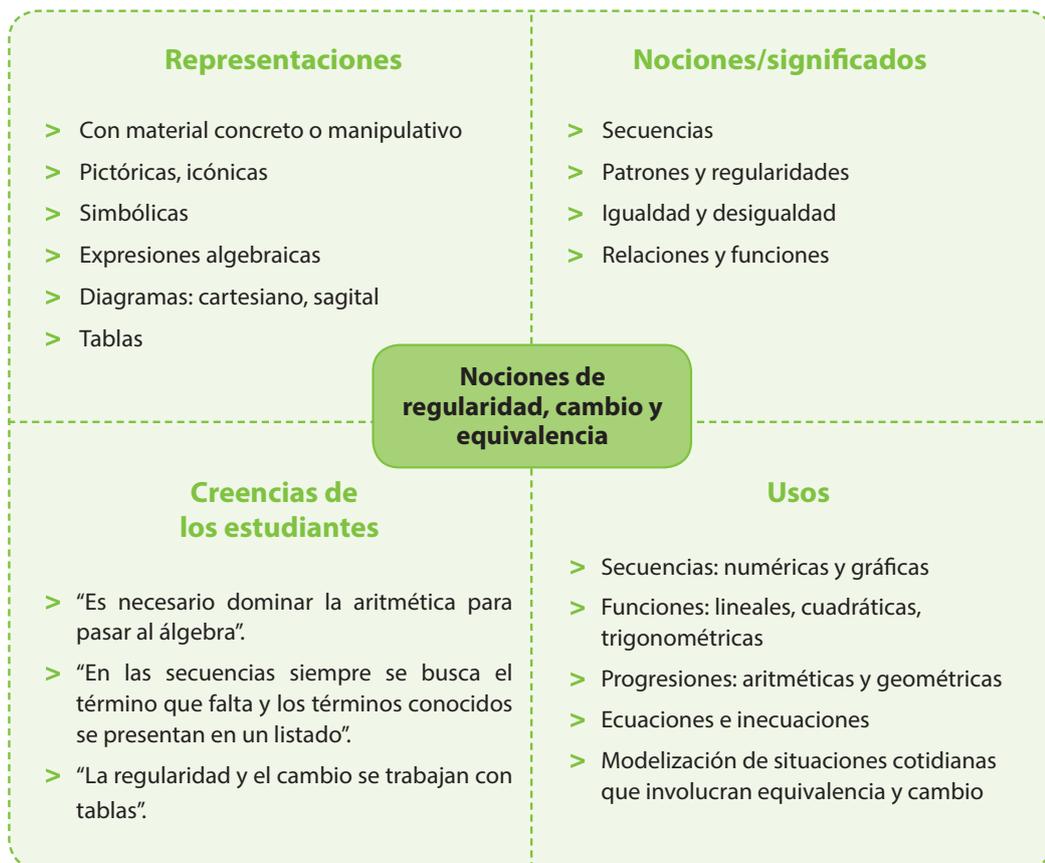
**¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?**

*Las dificultades expresan tanto limitaciones en la comprensión de la situación, como un manejo inadecuado de los distintos significados de la fracción. Proponga reajustes a partir de las siguientes preguntas.*

- *¿Qué elementos fundamentales de la situación identifican los estudiantes? ¿Por qué? ¿Cómo establecen una conexión entre esa situación y el valor solicitado?*
- *¿Qué ideas y creencias acerca de las fracciones presentan los estudiantes?*
- *¿Qué representaciones (gráfica, simbólica, etc.) emplean eficazmente? ¿Cómo analiza si son pertinentes o no?*
- *¿Qué estructura (aditiva o multiplicativa) reconocen los estudiantes en la situación problemática?*

## 5.2. Regularidad, equivalencia y cambio: Análisis del cambio de cantidades

En la vida cotidiana se puede constatar que las magnitudes (involucradas en un fenómeno social, económico o natural) se relacionan entre sí y pueden modificar sus valores o no. El siguiente organizador visual muestra distintos aspectos del abordaje de las regularidades, las equivalencias y del cambio, cuyo tratamiento por los estudiantes les posibilitaría desarrollar habilidades y conocimientos concernientes a este campo temático.



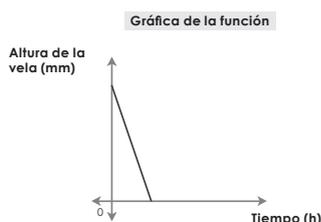
### Reflexione para mejorar su labor pedagógica

- ¿Qué creencias acerca de las regularidades presentan sus estudiantes?
- ¿Cómo propone analizar el cambio o la variación de cantidades en diferentes representaciones?
- ¿Promueve identificar un patrón de cambio?, ¿también su generalización?, ¿cómo?
- ¿De qué forma sus estudiantes interpretan los significados de las "letras" y las igualdades en una situación de cambio, regularidad o equivalencia?

### ► Ejemplo 3.

Se tiene una vela de forma cilíndrica de 60 mm de diámetro y 200 mm de altura. Una vez encendida, su altura disminuye de manera constante en 10 mm por hora.

Esta situación se representa mediante una función. Observa su gráfica.



En la situación, ¿qué representa la inclinación de la gráfica de la función?

- a La altura en el momento de inicio.
- b La variación del diámetro de la vela con respecto a su altura.
- c La variación de la altura de la vela en un tiempo determinado.
- d El tiempo en que la vela se consume totalmente.

#### Características de la pregunta

**Nivel de logro:**

Satisfactorio

**Capacidad:** Razona y argumenta

**Contenido:** Función lineal

**Contexto:** Extramatemático

**Respuesta:** c

*En esta pregunta se busca explorar la capacidad que tiene el estudiante para interpretar el significado de la pendiente de una función lineal afín que es utilizada en la representación de una situación problemática.*

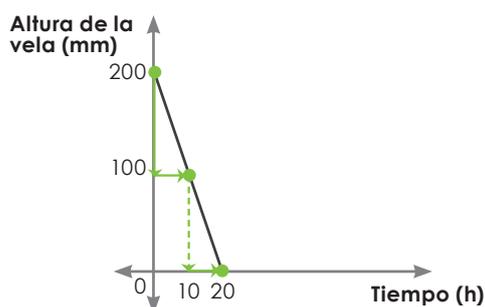


#### Proyecte qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta

- ¿Cómo identificarían cuáles son las variables que intervienen en la gráfica?, ¿y las unidades de medida involucradas?
- ¿De qué manera interpretarían la relación de dependencia entre esas variables? ¿Cómo la expresarían?, ¿utilizando letras, números o palabras?
- ¿Cómo interpretarían el significado de la pendiente?

#### Logro: Interpretan la inclinación de la recta, sustentados en la noción de pendiente

Estos estudiantes posiblemente identifican que la afirmación referida a que la altura de la vela disminuye en 10 mm cada hora expresa el valor de la pendiente de la recta. Así, no solo establecen la relación de dependencia entre las variables, sino que manifiestan una aproximación al significado de la pendiente de una recta como una razón de cambio, por lo cual identifican como respuesta válida a la alternativa "c".

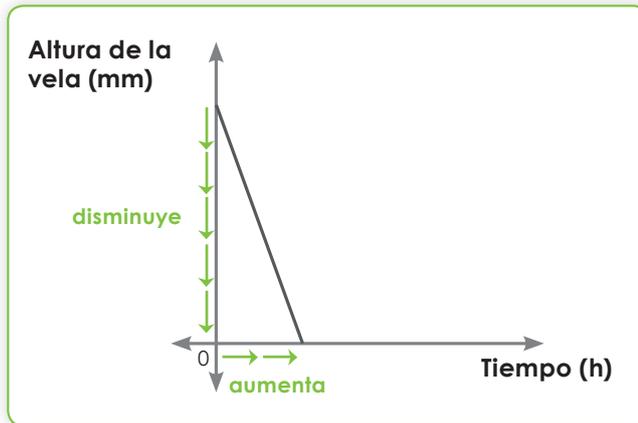


#### Estos estudiantes...

- establecen la relación de dependencia entre las dos variables.
- expresan una interpretación de la pendiente de la gráfica de una función lineal afín como una razón de cambio.

### Logro: Interpretan la inclinación de la recta como una relación entre las dos variables

Estos estudiantes posiblemente interpretan que la gráfica de la recta presenta pendiente negativa porque, a medida que la altura disminuye, el tiempo más bien aumenta. Asimismo, identifican tales movimientos como la relación de cambio entre las dos variables.

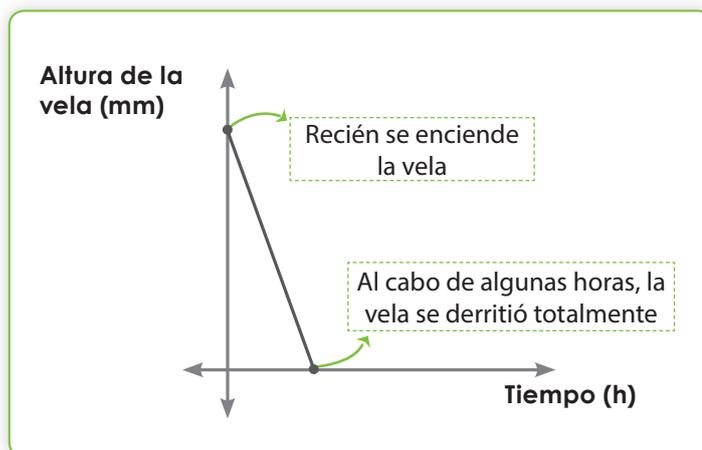


#### Estos estudiantes...

- *identifican la característica decreciente de esta función lineal sin utilizar valores específicos de las variables.*
- *relacionan el decrecimiento de la función lineal con el significado de la pendiente de esta recta.*

### Logro: Interpretan la inclinación de la recta a partir de los puntos de corte con los ejes

Algunos estudiantes comprenden la situación propuesta, distinguen las variables a analizar e interpretan la relación entre ellas, a partir de caracterizar a los puntos de intersección de la recta con los ejes cartesianos. Así identifican cómo la altura inicial de la vela disminuyó hasta quedar completamente derretida, luego de un tiempo determinado. Por consiguiente, identifican que la variación de la altura de la vela con respecto a un tiempo transcurrido representa la inclinación de la gráfica.



### Dificultad: No interpretan las relaciones de dependencia entre dos variables

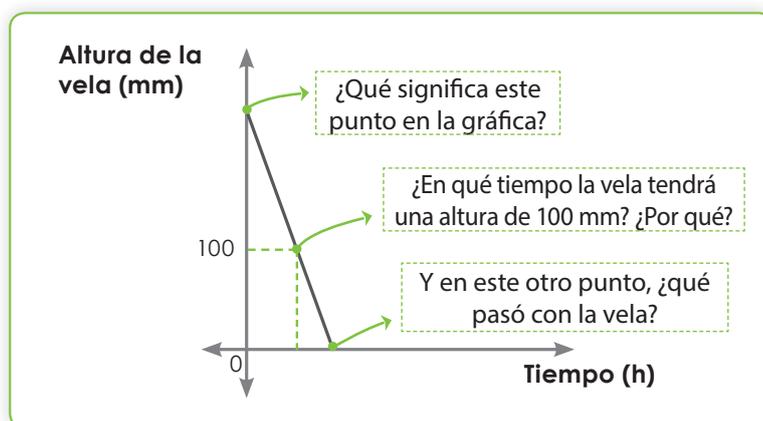
En la situación propuesta, una información clave se expresa en el enunciado siguiente: "... su altura disminuye de manera constante en 10 mm por hora...".

Al respecto, algunos estudiantes todavía presentarían dificultades para interpretar:

- > la dependencia de la altura de la vela con respecto al tiempo transcurrido.
- > la razón de cambio entre las variables (la medida de la disminución de la altura de la vela por cada hora: 10 mm por cada hora)

### Dificultad: No interpretan la representación de la recta, sus elementos y su inclinación

Algunos estudiantes no manejan el significado de la pendiente de la recta como una medida de su inclinación. Tampoco manejan el significado de sus puntos conformantes de esta, por ejemplo, su intercepto con cada uno de los ejes. Esto ocurre especialmente en problemas que modelizan situaciones de la vida diaria mediante una función lineal (gráfica o simbólicamente) y se podría apreciar al plantearles preguntas como: ¿la inclinación de la gráfica es constante? y otras más, indicadas en el siguiente recuadro.



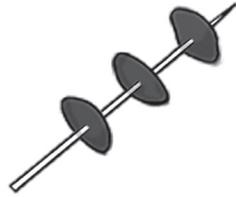
#### ¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?

Una cantidad significativa de estudiantes presenta dificultades para identificar el tipo de relación entre dos variables y también para interpretar la representación de una función. Considere reajustes a partir de las siguientes preguntas.

- ¿Aprovecha situaciones cotidianas para identificar las variables y evidenciar las relaciones de dependencia que se pueden establecer entre ellas? ¿Estas situaciones ayudan a construir la noción de función lineal?
- ¿De qué forma promueve que sus estudiantes representen una situación mediante una función lineal? ¿Les propone el desafío de transformar la representación de este modelo lineal a otro tipo de representación (por ejemplo, de una representación verbal a una representación gráfica o de esta a una representación algebraica)?
- Existe la creencia de que se puede analizar el comportamiento de una función solo cuando se tienen muchos valores numéricos explícitos en su gráfica. Esta creencia imposibilita el análisis y la comprensión de otros aspectos importantes en una función, tales como su crecimiento o decrecimiento, su dominio y rango, etc., que se pueden caracterizar cualitativamente sin necesidad de conocer valores particulares. ¿Con qué frecuencia usted propone actividades con gráficas que no presentan valores numéricos?

### ► Ejemplo 4.

Daniel prepara palitos con trozos de anticuchos como este:



La siguiente tabla muestra la cantidad de trozos de anticuchos que Daniel utiliza según la cantidad de palitos que prepara.

Cantidad de palitos	1	2	3	4	...
Cantidad de trozos de anticuchos	3	6	9	12	...

Con esta información elabora una pregunta cuya respuesta no esté a simple vista en la tabla.

#### Características de la pregunta

**Nivel de logro:** Satisfactorio

**Capacidad:** Matematiza

**Contenido:**  
Proporcionalidad

**Contexto:** Extramatemático

**Respuesta:** abierta

*En esta pregunta se busca explorar la capacidad del estudiante para formular un problema que involucre a dos magnitudes directamente proporcionales expresadas mediante números racionales.*



#### Proyecte qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta

- ¿Qué preguntas concernientes a una relación de proporcionalidad entre las dos cantidades formularían sus estudiantes?
- ¿Algunos estudiantes llegarán a plantear preguntas que conduzcan a generalizar, sin limitarse a la obtención de valores puntuales?, ¿qué preguntas harían?

#### Logro: Formulan preguntas vinculadas a una proporcionalidad directa, a partir de las condiciones propuestas

Estos estudiantes toman en cuenta la información proporcionada y formulan preguntas que involucran el uso de la proporcionalidad directa entre las variables propuestas.

¿Cuántos anticuchos habrá en 24 palitos?  
Rpt: 72 anticuchos.

Si Daniel tiene 36 trozos de anticuchos  
¿Cuántos palitos usará?

¿Cuál sería la expresión para saber  
cuántos trozos de anticuchos necesita  
para «n» palitos?  
 $n \cdot 3 = x$

#### Estos estudiantes...

- usan la información proporcionada para plantear sus preguntas.
- formulan preguntas que permiten establecer una relación de proporcionalidad entre las variables involucradas, con datos que no se presentan a simple vista en la situación propuesta.

## Logro: Formulan preguntas vinculadas también a otras nociones matemáticas

Los estudiantes toman en cuenta la información proporcionada y formulan preguntas que requieren el uso de otras nociones matemáticas, además de la proporcionalidad directa.

SI DANIEL TIENE 10 PALITOS y 9 TROZOS DE ANTICUCHOS ¿CUANTOS TROZOS DE ANTICUCHOS LE FALTAN PARA LLENAR LOS PALITOS?

¿Si tuviera 24 trozos de anticucho y 10 palitos que me sobraria, Palitos o Anticuchos?

¿Cuántos palitos necesita Daniel si prepara 35 anticuchos?  
Daniel necesita 11 palitos para hacer 35 anticuchos

### Estos estudiantes...

- formulan preguntas que, además de nociones de proporcionalidad, involucran otras nociones, por ejemplo, las aditivas.
- elaboran preguntas que involucran procedimientos de resolución de más de una etapa.

## Dificultad: Formulan preguntas que no involucran la resolución de un problema

Un grupo de estudiantes formula preguntas que finalmente no llevan a la resolución de un problema matemático, ya que hacen uso de información que aparece explícitamente en la situación propuesta.

Desarrollo:  
¿Por cada palito cuantos trozos de carne entraran?

¿de cuanto en cuanto avanza los anticuchos por palito?

Res: de tres en tres por cada palito

### Estos estudiantes

plantean una pregunta cuya respuesta se obtendría de una lectura directa de la información incluida en el enunciado dado.

### Dificultad: No formulan preguntas, pero evidencian la comprensión de la noción matemática que podrían utilizar al resolver un problema

Algunos estudiantes posiblemente no presentan dificultad en el empleo del razonamiento proporcional, ya que relacionan las variables propuestas en la situación; sin embargo, no llegan a formular la pregunta solicitada.

Cantidad de palitos = 1; 2; 3; 4; ~~5~~  
 Cantidad de trozos de anticucho = 3; 6; 9; 12; ~~15~~

En resumen sería que en cada palito se colocan 3 trozos de anticucho.

1) x3	2) x3	3) x3	4) x3	5) x3
3	6	9	12	15

#### Estos estudiantes

enfatan la resolución de lo que interpretan como tarea a resolver: "completar los valores que siguen en la tabla". ¿Esta predisposición se deberá a lo que usualmente se enfatiza en clase?

Finalmente, se obtuvieron evidencias de un considerable número de estudiantes que presentaron dificultades, tanto para utilizar la información proporcionada como también para formular una pregunta coherente con respuestas que no aparecen directamente en la tabla.



#### ¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?

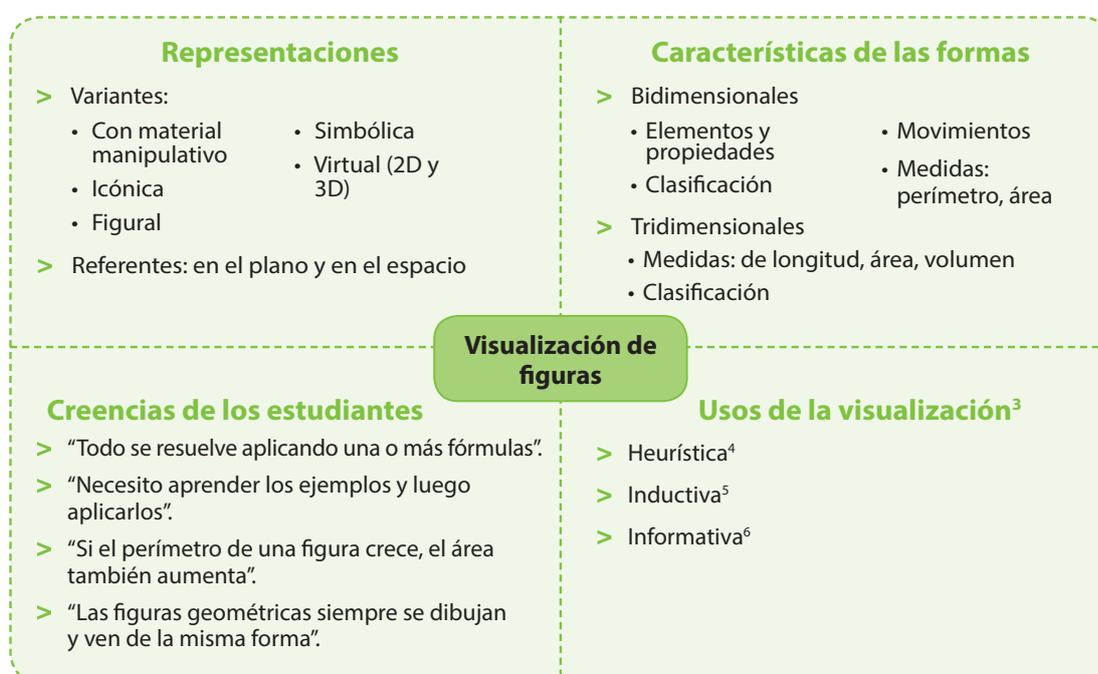
Las dificultades encontradas pondrían en evidencia las pocas oportunidades de los estudiantes para abordar tareas de formulación de problemas como parte de su aprendizaje. Considere reajustes en su labor de enseñanza a partir de las siguientes preguntas.

- ¿Cómo se podrían aprovechar los problemas que ya han resuelto sus estudiantes para que, a partir de ellos, propongan cambios y formulen nuevos problemas? ¿Usted desarrolla en clase otras estrategias para que formulen problemas?, ¿sistemáticamente o de manera eventual?
- ¿Qué habilidades desarrollan sus estudiantes al formular problemas? ¿Qué nociones matemáticas cree que utilizan con mayor frecuencia en la formulación de problemas?
- ¿Qué situaciones (estímulos) propondría para que sus estudiantes formulen problemas? ¿Cómo usaría los soportes gráficos?
- Cuando sus estudiantes formulan problemas, ¿espera que su producción sea original, creativa y muy bien redactada? ¿Será esto importante desde el inicio?, ¿por qué?
- ¿Cuáles son los aspectos fundamentales que caracterizan la formulación adecuada de un problema?

### 5.3. Forma, movimiento y localización: Visualización de figuras

Las personas usualmente tienen la capacidad de sintetizar las características de todo aquello que observan. Como parte de esta capacidad, pueden describir recurriendo al uso de las formas o figuras.

La visualización es inherente al desarrollo de la competencia matemática. Ella permite fortalecer la capacidad creativa de las personas, tal como se observa en la arquitectura, el dibujo artístico, el diseño industrial, la física, etc. Tomando como referencia la adaptación hecha por Marmolejo y González (2013) a la definición de Duval, se asume la visualización como una actividad cognitiva que involucra el reconocimiento de todas las organizaciones posibles de una configuración geométrica, además de aquellas que se obtienen al primer “golpe de vista”. El siguiente organizador visual muestra algunos de los aspectos involucrados en el desarrollo de la visualización de las figuras.



#### Reflexione para mejorar su labor pedagógica

- ¿Qué creencias tienen sus estudiantes sobre las figuras? Por ejemplo, ¿creen que un triángulo debe tener siempre uno de sus lados en posición horizontal?, ¿o que un rombo no es un cuadrado?
- ¿De qué manera (explícita o intuitivamente) ha abordado la visualización con sus estudiantes?, ¿con qué formas (bidimensionales o tridimensionales)?
- ¿Cómo favorecería la visualización a la construcción de nociones geométricas?

<sup>3</sup> Tomado de Marmolejo, G. y Gonzales, T. (2013). Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. En *Revista Integración* vol. 31, pp. 87-106. Consultada en: <http://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/3386>

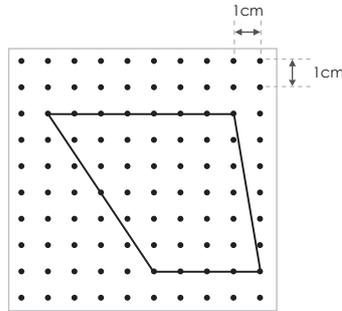
<sup>4</sup> Se presenta si, desde la información perceptual de la figura, se generan ideas o suscitan maneras de proceder que guían la comprensión de la tarea propuesta.

<sup>5</sup> Cuando es necesario considerar información distinta a las características perceptuales de la figura propuesta.

<sup>6</sup> Cuando aporta información adicional y complementaria a la que menciona el enunciado o consigna, y que, además, es relevante para desarrollar la tarea propuesta.

### Ejemplo 5.

¿Cuál es el área de la figura delimitada por las líneas negras?



- |                            |                    |                            |                    |
|----------------------------|--------------------|----------------------------|--------------------|
| <input type="checkbox"/> a | 18 cm <sup>2</sup> | <input type="checkbox"/> c | 33 cm <sup>2</sup> |
| <input type="checkbox"/> b | 28 cm <sup>2</sup> | <input type="checkbox"/> d | 42 cm <sup>2</sup> |

#### Características de la pregunta

**Nivel de logro:** Satisfactorio

**Capacidad:** Elabora y usa estrategias

**Contenido:** Área de figuras planas

**Contexto:** Intramatemático

**Respuesta:** c

*Esta pregunta busca que el estudiante halle el área de la figura indicada sin contar con datos explícitos del tipo de figura ni de sus medidas.*

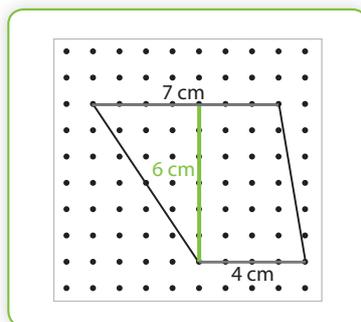


**Proyecte qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta**

- ¿Con qué figura plana sus estudiantes asociarían la figura mostrada?
- ¿Qué estrategias emplearían para encontrar el área de la figura completa (componer o descomponer, etc.)?

#### Logro: Identifican el tipo de figura y determinan el área mediante el uso de la fórmula

Estos estudiantes posiblemente identificaron que se trataba de un trapecio a partir de reconocer el par de segmentos paralelos como sus bases. Luego, habrían determinado las medidas de esas bases y de la altura del trapecio, y finalmente calcularon el área aplicando la fórmula respectiva. Su respuesta fue 33 cm<sup>2</sup>.

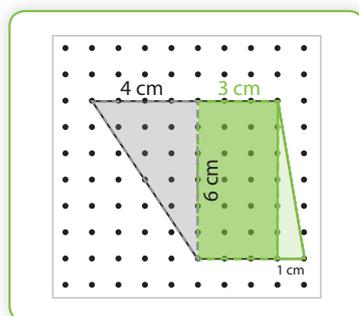


$$A = \left( \frac{B+b}{2} \right) \cdot h \longrightarrow A = \left( \frac{7+4}{2} \right) \cdot 6 = 33$$

**Logro: Efectúan composiciones o descomposiciones de la figura**

Estos estudiantes habrían visualizado la figura dada como el resultado de componer o descomponer figuras más sencillas que facilitan el cálculo del área. Esto posiblemente lo hicieron de diferentes formas, entre ellas las siguientes:

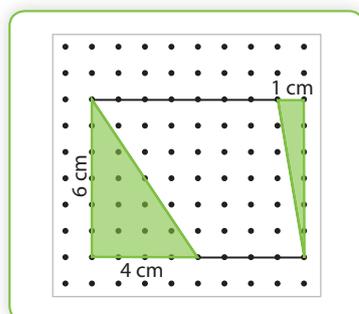
**Estrategia 1:** Los estudiantes descomponen la figura en partes triangulares y rectangulares y determinan el área de cada parte, mediante la aplicación de la fórmula respectiva, para finalmente sumar y hallar el área de la figura dada.



$$\frac{6 \times 4}{2} + 3 \times 6 + \frac{6 \times 1}{2}$$

$$12 + 18 + 3 = 33 \text{ cm}^2$$

**Estrategia 2:** Algunos estudiantes posiblemente imaginan la figura dada como parte de un rectángulo. De ese modo, para calcular el área solicitada, restan del área de ese rectángulo ( $6 \times 8 = 48 \text{ cm}^2$ ) el área de dos triángulos fácilmente identificables que no forman parte de la figura dada. Observe:



Área de la figura dada:

$$48 - (12 + 3) = 33 \text{ cm}^2$$

**Dificultad: Confunden área con perímetro o con alguna de las medidas de la figura**

- > Si el estudiante eligió la alternativa incorrecta  $18 \text{ cm}^2$ , es probable que haya confundido la noción de área con la de perímetro. Además, cometió error al buscar la medida de los lados no paralelos. El cálculo que habrían efectuado sería  $7 + 3 + 4 + 4 = 18 \text{ cm}^2$ .
- > Si el estudiante eligió la alternativa incorrecta  $28 \text{ cm}^2$ , es probable que haya identificado las medidas de los lados paralelos 7 y 4 cm respectivamente, y luego, mediante el producto de ellas, haya obtenido el área como si se tratara de un rectángulo. Así:  $A = 7 \times 4 = 28 \text{ cm}^2$ .
- > Si un estudiante eligió la alternativa incorrecta  $42 \text{ cm}^2$ , es posible que haya identificado las medidas de los lados paralelos y de la distancia entre ellos (6 cm). Luego, al asumir que el área de un cuadrilátero es igual a "base por altura" y haber tomado como base la de mayor medida (7 cm), obtuvo:  $A = b \times a = 7 \times 6 = 42 \text{ cm}^2$ .



### ¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?

Las dificultades indican que los estudiantes no han construido adecuadamente tanto la caracterización de las diversas figuras planas, como también las nociones de área y de perímetro. Considere reajustes a partir de las siguientes preguntas.

- Las figuras planas que tienen base, ¿siempre se presentan con la base en posición horizontal? Recuerde que presentarlas en la misma posición induce a considerar esa condición como cualidad inherente a esas figuras.
- ¿Cómo identifican las figuras sus estudiantes? ¿Hacen el reconocimiento de sus elementos o de sus partes?
- ¿Confunden los estudiantes el área con el perímetro? Si así fuera, ¿a qué se debería?
- ¿Qué tipo de material concreto podría utilizarse en problemas como el analizado?
- ¿Qué variaciones haría a esta pregunta? ¿Con qué intención pedagógica las plantearía?

## 5.4. Gestión de datos e incertidumbre: Alfabetización estadística

Estamos inmersos en ambientes caracterizados por la presencia de la incertidumbre y el acelerado crecimiento de datos e información. Internet es una notable expresión de este fenómeno. En estos ambientes, personas e instituciones enfrentan exigencias para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Interpretar información estadística y expresar o argumentar sobre la base de esta es entonces indispensable para toda persona que pretenda una actuación eficaz. El siguiente organizador visual nos muestra algunos aspectos involucrados en la construcción de esta competencia.



### Reflexione para mejorar su labor pedagógica

- ¿Cómo se pueden conectar los conocimientos de cantidad con los de gestión de datos?
- ¿De qué manera se pueden relacionar dos formas de representación de datos estadísticos?
- ¿Cómo se podría fomentar la estimación en la interpretación de tablas y gráficos?

## ► Ejemplo 6.

Estudiantes matriculados en los talleres de deporte

Taller de deporte	Cantidad de estudiantes
Natación	60
Fútbol	20
Vóley	10
Atletismo	30
<b>Total</b>	<b>120</b>

¿Cuál de los siguientes gráficos representa la información de la tabla?



Estudiantes matriculados en los talleres de deporte



c

Estudiantes matriculados en los talleres de deporte



b

Estudiantes matriculados en los talleres de deporte



d

Estudiantes matriculados en los talleres de deporte



### Características de la pregunta

**Nivel de logro:** En inicio

**Capacidad:** Comunica y representa

**Contenido:** Tablas y gráficos estadísticos

**Contexto:** Extramatemático

**Respuesta:** a

Se busca que el estudiante resuelva situaciones problemáticas que implican relacionar la información proporcionada en una tabla con gráficos estadísticos asociados a ella.



### Proyecte qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta

- ¿Cómo identificarían las variables y los datos de la tabla de frecuencias?
- ¿Qué datos referenciales establecerían para conectar la tabla con el gráfico?
- ¿De qué forma establecerían relaciones de orden o de proporcionalidad entre los datos de la tabla y los gráficos presentados?

### Logro: Analizan los datos de la tabla y relacionan las cantidades parciales con el total

Estos estudiantes posiblemente identifican la cantidad de matriculados en cada deporte y eligen el dato más saltante en su condición de parte del total. ¿Cuál? Aquel que posibilite construir una fracción notable cuya representación gráfica sea fácil de identificar.

Así, identifican que en natación están matriculados 60 de 120 estudiantes:  $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

A partir de esta fracción, posiblemente busquen en cuál o cuáles de los gráficos "natación está representada por la mitad". La cumplen las alternativas "a" y "c". Para identificar cuál de estas es la respuesta, una posibilidad es relacionar otra cantidad notable con el total: 30 con 120 y concluir que equivale a  $\frac{1}{4}$ . También, otra variante es aplicar razonamiento proporcional y llegar a similar conclusión. Por tanto, a atletismo le debería corresponder la cuarta parte del gráfico circular. Luego, la respuesta es la alternativa "a".

**Estudiantes matriculados en los talleres de deporte**

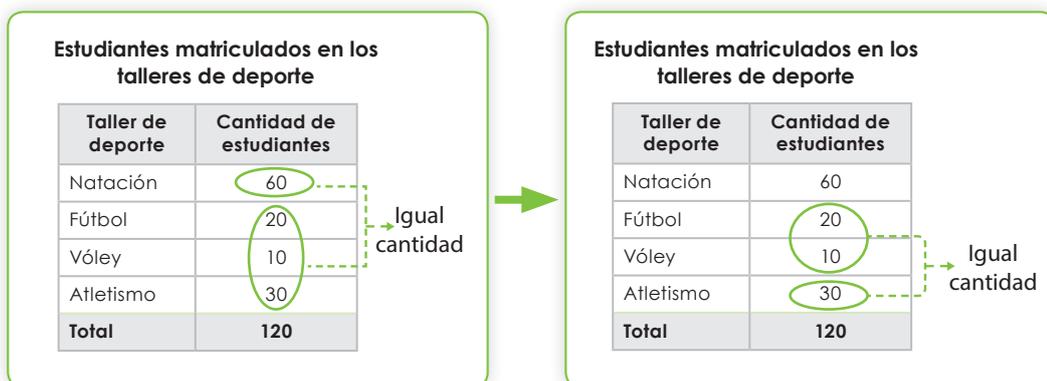
Taller de deporte	Cantidad de estudiantes
Natación	60
Fútbol	20
Vóley	10
Atletismo	30
<b>Total</b>	<b>120</b>

$\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

$\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

**Logro: Establecen equivalencias entre las partes que conforman la población**

Algunos estudiantes posiblemente identifican que la población puede presentarse como distribuida en dos grandes partes iguales. También, aprecian que uno de tales grupos se subdivide, a su vez, en otras dos partes iguales. Así:



Luego, determinan que estas relaciones se visualizan en el gráfico circular "a". Observe:



### Dificultad: Solo ordenan, según la cantidad de matriculados, los talleres respectivos

Al analizar la tabla de frecuencias, los estudiantes identifican que el mayor grupo de matriculados corresponde al taller de natación. Pero esto se aprecia en los cuatro gráficos, de modo que este camino resulta insuficiente para avanzar hacia la solución. En este escenario, algunos estudiantes logran establecer un orden según la cantidad de matriculados: que a natación le sigue atletismo, luego fútbol y, finalmente, vóley. Si bien este ordenamiento es correcto, también se verifica que no es suficiente para determinar la respuesta correcta. De modo que, estos estudiantes, al no lograr cambiar de perspectiva, no se aproximarían a la solución del problema. No aplicarían el razonamiento proporcional, ni harían una asociación correcta entre el valor de las cantidades y el tamaño de los sectores circulares.



#### ¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?

Para superar estas dificultades y desarrollar la habilidad de los estudiantes, se sugiere actuar a partir de un diagnóstico de su nivel de comprensión de gráficos estadísticos. Podría usarse la clasificación de Curcio, quien formula tres niveles de comprensión: leer los datos (lectura literal), leer entre datos (comparación de datos) y leer más allá de los datos (extensión de la información). Considere reajustes a partir de las siguientes preguntas.

- ¿Qué oportunidades tienen sus estudiantes para hacer la lectura de tablas y de gráficos estadísticos? ¿Utilizan principalmente gráficos acerca de situaciones próximas a su vida cotidiana?
- ¿Qué actividades con nociones estadísticas les posibilitan desarrollar su razonamiento proporcional?
- ¿Qué referentes podrían usar los estudiantes para conectar tablas con gráficos estadísticos?
- Es muy importante que sus estudiantes no asuman pasivamente la información que reciben, sino más bien que averigüen acerca de la procedencia y de la veracidad de los datos presentados. ¿Cómo se puede fomentar una actitud crítica ante la generación y circulación de información estadística?

### ► Ejemplo 7.

En una caja se colocan bolas de igual tamaño. En la caja hay: 4 bolas azules, 3 bolas verdes, 2 bolas rojas y 1 bola amarilla. Si se saca al azar una bola de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de color verde?

- a  $\frac{1}{10}$
- b  $\frac{1}{3}$
- c  $\frac{3}{10}$
- d  $\frac{3}{1}$

#### Características de la pregunta

**Nivel de logro:** En proceso

**Capacidad:** Matematiza

**Contenido:** Probabilidad

**Contexto:** Extramatemático

**Respuesta:** c

Se busca que el estudiante resuelva situaciones problemáticas que requieren el uso de la noción de probabilidad de un evento.



### Proyecte qué pueden hacer sus estudiantes para resolver esta pregunta

- ¿Cómo determinarían el espacio muestral de un evento?
- ¿De qué forma utilizarían el significado de la fracción como parte-todo?
- ¿Qué criterios de clasificación establecerían?

### Logro: Analizan los datos y aplican la noción de probabilidad

Estos estudiantes identifican la cantidad total de bolas que hay en la caja acumulando las cantidades de bolas que han sido clasificadas por su color. Esto es: 4 bolas azules, 3 bolas verdes, 2 bolas rojas y 1 bola amarilla dan un total de 10 bolas.

Luego, la probabilidad de que la bola que se saque al azar sea de color verde se calcula comparando, mediante una división indicada, la cantidad de eventos favorables con respecto al total de eventos: 3 de 10, es decir  $\frac{3}{10}$  (alternativa "c").

### Dificultad: No comprenden la noción de probabilidad de un evento

- > Algunos estudiantes identifican el total de bolas que hay en la caja (10) y se centran en una condición de la pregunta: sacar una bola, obviando la cualidad de que sea verde. Así, erróneamente marcan como respuesta  $\frac{1}{10}$  (alternativa "a").
- > Otro grupo de estudiantes fija su atención en el dato de que hay 3 bolas verdes en la caja, pero ignoran que en total son 10 bolas en la caja, cada una con la misma posibilidad de ser extraída. Erróneamente identifican que la probabilidad de que salga una bola verde equivale a sacar una entre tres bolas y marcan  $\frac{1}{3}$  (alternativa "b").
- > Otros estudiantes solo se centrarían en el conteo de las bolas del color indicado. Posiblemente por ello marcan que la probabilidad es  $\frac{3}{1}$  (alternativa "d").



### ¿Cómo ayudar a superar estas dificultades?

Las dificultades muestran que una parte de los estudiantes aún no han construido la noción de probabilidad de un suceso (en este caso, según el enfoque de Laplace). Se sugiere considerar reajustes a partir de las siguientes preguntas.

- ¿De qué forma brinda oportunidades a sus estudiantes para reproducir el experimento aleatorio con el fin de comprender las posibles respuestas del mismo? Tenga presente que hacerlo les daría claridad respecto al espacio muestral y al evento en cuestión. También les daría concreción para discriminar qué resultados o sucesos se pueden obtener y cuáles serían imposibles.
- ¿Qué experiencias deben desarrollar sus estudiantes para construir la noción de probabilidad como una medida de la ocurrencia de un suceso? ¿Qué criterios les permitiría determinar cuándo es pertinente el uso del enfoque de probabilidad de Laplace?

## 6. Sugerencias pedagógicas

La actividad fundamental para el aprendizaje de la matemática es **la formulación y resolución de problemas**. En particular, la creación o formulación de problemas, a partir de cierta situación dada, exige establecer relaciones lógicas entre la información que involucra tal situación y el resultado que tendría el problema propuesto. Así, cuando los estudiantes formulan correctamente un problema evidencian que son capaces de interpretar una situación, de representar ideas matemáticas y comunicarlas, de aplicar nociones y utilizar relaciones aprendidas y, posiblemente, de proyectar procedimientos para su resolución.

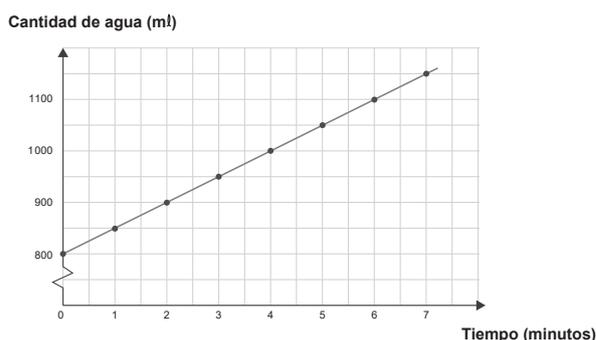
En los resultados de la ECE 2016 en segundo grado de secundaria, así como en la Evaluación Muestral de Matemática en sexto grado 2013, se hallaron evidencias de que los estudiantes tenían serias dificultades para crear problemas a partir de una situación propuesta. En algunos casos, no identificaban qué se les pedía; en otros, no sabían qué información considerar o no lograban proyectar y delimitar una tarea coherente.

Una situación de formulación de problemas, según Stoyanova y Ellerton (1996), puede tipificarse como estructurada, semiestructurada y libre.

Una situación es **estructurada** cuando las actividades de planteamiento de problemas tienen un contexto inicial, claramente delimitado. Por ejemplo:

- > *Tomar como base la siguiente situación y plantear una pregunta para que se conforme un problema.*

La siguiente gráfica nos muestra la relación entre el tiempo que permanece abierto un caño y la cantidad de agua que se va almacenando en un depósito. Observa:



Tareas de este tipo también posibilitan que el estudiante establezca que una situación base inicial (estímulo), que tiene los mismos datos, sirve para construir diversos problemas, cuya resolución varía en función de la pregunta planteada.

Una situación de formulación de problemas es **semiestructurada** cuando, en el proceso de construcción de un concepto matemático, se solicita formular un problema que requiera su uso. Por ejemplo, si se estuviera tratando el concepto de función lineal:

- > *Plantear un problema de la vida diaria en la que se involucre de manera principal el uso de la función lineal.*

- > Formular un problema que involucre dos variables cuya relación de dependencia esté dada por la expresión:  $y = 4x$

Una situación es **libre** cuando se solicita a los estudiantes que generen un problema a partir de una situación dada, natural o simulada. Cabe subrayar que en la resolución del problema planteado se deben utilizar habilidades y conocimientos matemáticos. Por ejemplo:

- > Formular un problema matemático vinculado al fenómeno de los huaicos o inundaciones que ocurre en alguna zona del país, en la estación lluviosa.

Por otra parte, ante la inquietud de definir una secuencia adecuada de actividades en el desarrollo de la competencia de formulación y resolución de problemas, se sugiere un grupo de tareas cuya secuencia podría adecuarse en función del grupo de estudiantes y de la finalidad de la sesión de aprendizaje:

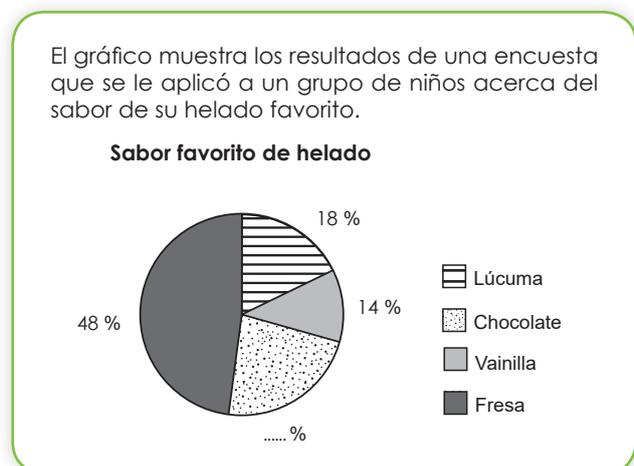
- > Replantar un problema completo dado, manteniendo su estructura pero modificando datos.
- > Replantar un problema completo dado, manteniendo el estímulo pero modificando la interrogante o la solución a obtener, de modo que se formule otra pregunta pertinente que se pueda responder con la información brindada.
- > Identificar situaciones que pueden generar problemas. Explorar con ellas el tipo de interrogantes que se podrían plantear.
- > Crear un nuevo problema de contexto extramatemático en el que esté involucrado centralmente un concepto o procedimiento matemático.

Una manera de dar un uso adecuado a las preguntas de la ECE podría ser replantearlas como parte de tareas de formulación de problemas. Por ejemplo, a partir de la situación de partida de una pregunta de la ECE 2015 (véase el recuadro), se solicita formular la interrogante que la convierta en un problema.

Es posible que, entre otras, algunas respuestas a esta tarea de formulación puedan ser:

- > Si la encuesta se aplicó a 200 niños y niñas, y se quiere entregarles un helado con su sabor favorito, ¿cuántos helados con sabor a vainilla se necesitarán?
- > Si la encuesta se aplicó a 50 niños y niñas, ¿cuántos más prefieren helado con sabor a chocolate que con sabor a vainilla?
- > Edgar dice: "La mayoría prefiere un helado con sabor diferente a fresa". ¿Estás de acuerdo con esa afirmación? Explica tu respuesta.

En suma, fomentar sistemáticamente la formulación de problemas puede aportar de manera significativa al desarrollo de la competencia matemática.



## Anexo

La siguiente tabla muestra los resultados alcanzados en Matemática por los estudiantes de segundo grado de secundaria en su UGEL, su DRE y a nivel nacional.

**Tabla A.1** Resultado de su UGEL, su DRE y nacional en 2.º grado de secundaria en Matemática

Niveles de logro	UGEL	DRE	Nacional
Satisfactorio			11,5 %
En proceso			16,9 %
En inicio			39,3 %
Previo al inicio			32,3 %
<b>Total</b>			<b>100,0 %</b>

Para acceder a los resultados generales de la ECE,  
puede ingresar al sitio web del Sicrece.



<http://sicrece.minedu.gob.pe>

Si usted tiene alguna consulta o comentario sobre este informe, comuníquese con nosotros:

✉ [medicion@minedu.gob.pe](mailto:medicion@minedu.gob.pe) ☎ Telf. (01) 615-5840

Visite nuestro sitio web:

🌐 <http://umc.minedu.gob.pe>

Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes  
Ministerio de Educación  
**Calle Las Letras 385, San Borja, Lima 41, Perú.**